

Задание на тему
Физики

айб. 11-14 7-11

преподаватель: Александров Александр

Задание на тему: "Задание на тему"

Курс: А.Н. Тихонов, А.А. Самарский
"Задание на тему физики"

Задание 1
Дата: 4.03

Задание на тему: "Задание на тему"

$u(x, y)$

О.б.с.д.: $F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y),$
2-й уровень: $u_{xx}(x, y), u_{yy}(x, y), u_{xy}(x, y)) = 0,$
 $(x, y) \in D$

Задание: найти решение задачи Дирихле
 $u_{11}(x, y)u_{xx}(x, y) + 2a_{12}(x, y)u_{xy}(x, y) + a_{22}(x, y)u_{yy}(x, y) + F_1(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0,$
 $(x, y) \in D$

Лин. урав. II пор. (овен. неогр. $\underline{u}$)

$$a_{11}(x,y)u_{xx}(x,y) + 2a_{12}(x,y)u_{xy}(x,y) + a_{22}(x,y)u_{yy}(x,y) + b_1(x,y)u_x(x,y) + b_2(x,y)u_y(x,y) + c(x,y)u(x,y) + f(x,y) = 0,$$

$(x,y) \in A$

Классификация урав. II пор.

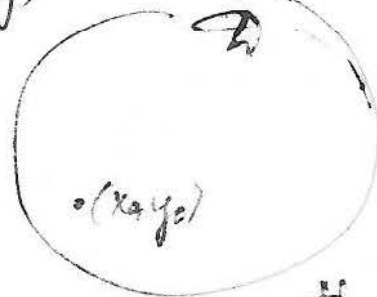
1) Гип. Δ в н. (x_0, y_0) ^{диск.} напрямая:

Гиперболическое урав., если $a_{12}^2(x_0, y_0) - a_{11}(x_0, y_0)a_{22}(x_0, y_0) > 0$;

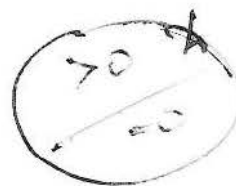
2) Гип. Эллиптическое урав., если $a_{12}^2(x_0, y_0) - a_{11}(x_0, y_0)a_{22}(x_0, y_0) < 0$;

3) Гип. Параболическое урав., если $a_{12}^2(x_0, y_0) - a_{11}(x_0, y_0)a_{22}(x_0, y_0) = 0$.

(x,y)



Если u гип. схр. в беск. овен., а то гип. наг-е гип. урав. будет оцен.



Если u

гип. в беск. урав. будет оцен.

Примеры:

1) Гиперболическое урав. $u(x,t)$

$$a_{11} = a^2, a_{12} = 0, a_{22} = -1,$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

Болновое / гип. урав.

2) Гиперболическое урав. $u(x,y)$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

гип. урав.

3) Параболическое урав. $u(x,t)$

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

гип. урав.

Часть I

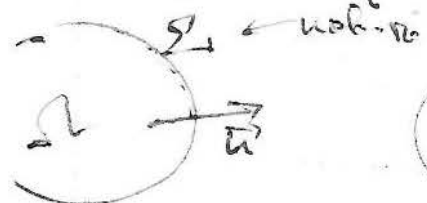
Уравнения на работнието и поле

I) Вывод уравнения непрерывности

основанное на законе:

1) Закон сохранения заряда

$$\vec{A}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$$



В произв. точке
вектор $\vec{n}$ направлен
наружу.

$$\iiint_{\Omega} (\vec{A} \cdot \vec{n}) d\Omega = \iiint_{\Omega} \text{div } \vec{A} d\Omega$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\text{grad } \varphi = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\}$$

$$\varphi(x, y, z)$$

2) Теорема о среднем, обобщенная

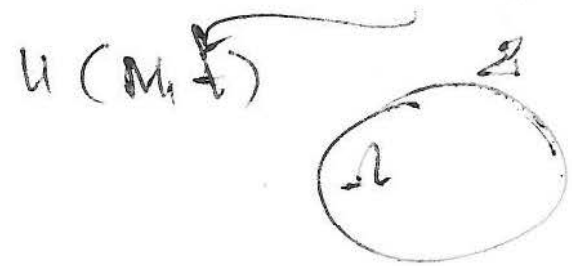
$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a), \quad \xi \in [a, b]$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) d\Omega = f(\xi) \cdot V_{\Omega}$$

где f непрерывна
в замкнутом Ω .

Вывод ур.:

$U(x, y, z)$ непрерывна
[обознач: $M = (x, y, z)$]



Все хар-
терист. век-
ты не зависят
от времени

$c(x, y, z)$ - конст. давление
в единицах

$\rho(x, y, z)$ - масса в б. е.

$$Q_{t_1} = \iiint_{\Omega} c(m) \rho(m) u(m, t_1) d^3m$$

как масса
кон. масса в
задан. объ-е?

закон Гюгени

$$W(x, y, z) = -k(x, y, z) \text{ grad } u(x, y, z, t)$$

коэф.
интегрирования

t_1, t_2
берем 2
момента,
времени

$t_2 > t_1$

как изм.
кон. масса
в Ω за
уп-е время Δt

~~$P(x, y, z)$~~ $F(x, y, z, t)$

$$\iiint_{\Omega} c(p) \rho(p) [u(p, t_2) - u(p, t_1)] d^3p$$

нормы
масса
измен.
время

$(\vec{n}, \vec{n}) \rightarrow \vec{r}_p dt$

интегрирование
по поверхности

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} F(p, t) d^3p dt$$

интеграл по времени

интеграл по пространству
(интегрирование по объ-му)

инт. по времени
интегрирование по времени

Переход: $u \mapsto \tilde{u}$.

Предположим, что в каноническом базисе Ω

$$c(M), p(M) \in C^1(\bar{\Omega})$$

непрер.

$$k(M) \in C^1(\bar{\Omega})$$

$$F(M, t) \in C^1(\bar{\Omega} \times [t_1, t_2])$$

$$u(M, t) \in C^1(\bar{\Omega} \times [t_1, t_2])$$

но упрощ.
переход

непр.
для u
но границей

$$\iiint_{\Omega} c(p) p(p) \frac{\partial u}{\partial t}(p, t_3) d\Omega +$$

уравн. в Ω

тогда u — решение

$$= - \iiint_{\Omega} \operatorname{div} W d\Omega +$$

уравн. на $\partial\Omega$

тогда u — решение

$$+ \iiint_{\Omega} F(p, t_4) d\Omega \times (t_2 - t_1)$$

$t_2, t_4 \in [t_1, t_2]$
 $M_2, M_3, M_4 \in \bar{\Omega}$

$$c(M) p(M) \frac{\partial u}{\partial t}(M, t_2) V_{\Omega}(t_2 - t_1) =$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} W \Big|_{t=t_2} d\Omega +$$

$$+ F(M_2, t_4) V_{\Omega}(t_2 - t_1).$$

$$c(M_1) \rho(M_1) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(M_1, t_3) V_\Omega =$$

$$= -\operatorname{div} \vec{w} \Big|_{\substack{M=M_3 \\ t=t_5}} V_\Omega +$$

$$+ F(M_2, t_4) V_\Omega$$

§ 4. Век φ -нормировка $\Rightarrow$ условие
 сообразия предельных
переходов:

$$M_1, M_2, M_3 \rightarrow M; \quad t_1, t_2, t_3 \rightarrow t$$

$$t_4, t_5, \dots \rightarrow t$$

$$c(M) \rho(M) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(M, t) = -\operatorname{div} \vec{w} \Big|_{M, t} \oplus$$

$$\oplus F(M, t).$$

$$W(x, y, z, t) = W(M, t) =$$

↓
 параметр
 div $\vec{w}$

$$= -K(M) \operatorname{grad} u \Big|_{M, t}$$

$$c(M) \rho(M) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(M, t) =$$

$$= \operatorname{div} [K(M) \operatorname{grad} u(M, t)] +$$

$$+ F(M, t)$$

Ля: φ -нормировка

$$u(x, y, z, t)$$

$$c(x, y, z, t) \rho(x, y, z, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, y, z, t) =$$

$$= \operatorname{div} [K(x, y, z) \operatorname{grad} u(x, y, z, t)] + F(x, y, z, t)$$

$(x, y, z) \in \Omega$

Источники

$\rho(x, y, z), k(x, y, z)$

$a^2 = \frac{k}{\epsilon \rho}, \quad \vec{F} = \frac{F}{\epsilon \rho}$ — коэффициент

$\text{div grad } u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$

↑
уменьш
↓
уменьш

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + \vec{F}(x, y, z, t)$

Упр-е теплопроводности (2D)

В "упрощенном" виде.

2. Волновое уравнение
и/или уравнение теплопроводности
основных задач.

Если исход. и вводится 1-е уравнение
упр-е; граничные
как условия упр-е

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + \vec{F}(x, y, z, t)$

$u(x, t)$

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$

Крайние задачи на отрезке



Как условия граничные: $\psi = 0$

→ Начальные условия

$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$

Крайние задачи (привести)

- 1) $\psi = 0: u(0, t) = \mu(t)$
- 2) $\psi \neq 0: u_x(0, t) = \gamma(t)$

6 и. л. условия
наимен. б. 70 ме. с. а. м. е.

Задача Бернулли и условия
на концах краевых
и поперечных краев краевых.

1ая краевая:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u(0, t) = g_1(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u(l, t) = g_2(t)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$



Лекция 2

с. 1103.14

(к задаче)
на краях

Общая краевая задача:

Она упр. не приводится

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \\ L_1 u(0, t) + \beta_1 u_x(0, t) = \theta_1(t) & 0 \leq t \leq T \\ L_2 u(l, t) + \beta_2 u_x(l, t) = \theta_2(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

$$L_l^2 + \beta_l^2 > 0, \quad l = 1, 2$$

минус L и β , поперечные
поперечные.

КЗ не поперечные

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & x > 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ u(0, t) = g(t), & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0 \end{cases}$$

1ая КЗ

Сделаем 2-ю краевую:

$$u_x(0, t) = \gamma(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

или 2ая КЗ

и т.д.

НУ разрывности:

$$\mu_1, \mu_2 \in C[0, T]$$

$$\varphi \in C[0, l]$$

$$\mu_1(0) = \varphi(0), \quad \mu_2(0) = \varphi(l)$$

предмет на "нечетных" узлах
нр-ка" должно
совпадать.

есть перед, задан $U(x, t) \in C^{2,1}[\overline{Q}]$,
то тогда же $\mu_1'(0) = a^2 \varphi''(0)$!

"Все-то у нас одинаково":

1) Ряд Фурье - разложение не $\sin$

$$\sin nx \quad n \text{ не } \cos$$

$$0 \leq x \leq l, \quad n = 1, 2$$

$$f(x) \in C[0, l]$$

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(s) \sin \frac{n\pi s}{l} ds \quad \leftarrow \text{коэф. Фурье.}$$

(Т) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ - верно там, если
ряд коэф. Ф как р. функции

2) Об. в. коэф. Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 < \infty$$

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \begin{cases} \frac{l}{2}, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Все $\sin$
ортогональны

4) Все то же самое - с косинусами
 $\cos nx, \quad n = 0, 1, \dots$

$$\hat{f}_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(s) \cos \frac{n\pi s}{l} ds, \quad n = 1, 2$$

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(s) ds.$$

Метод разложения по р. Фурье
1-й КЗ для $u|_{x=0}$

$$(1) \quad u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$(2) \quad u(0, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T$$

$$(3) \quad u(l, t) = 0$$

$$(4) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

Мисли, пети (1) & биде

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

$$X(x) T'(t) = \alpha^2 X''(x) T(t) \quad | : \alpha^2 X T$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = -\lambda = \text{const}$$

↓
уравн.
2-го порядка

a) $X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 \leq x \leq l$

b) $T'(t) + \alpha^2 \lambda T(t) = 0, 0 \leq t \leq T$

Решаемые с кр. условиями:

a) $\begin{cases} X(0) = 0, X(l) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 \leq x \leq l \end{cases} \Rightarrow$

нужно λ
нужно λ
нужно λ

↓

Минимум - максимум
 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n=1, 2, \dots$ - ежен.

$X_n(x) = \tilde{C}_n \sin \frac{n\pi}{l} x, n=1, 2, \dots$

b) $\begin{cases} T'(t) + \alpha^2 \lambda T(t) = 0, 0 \leq t \leq T \\ T_n'(t) + \alpha^2 \lambda_n T_n(t) = 0 \end{cases}$

$$T_n(t) = \tilde{C}_n \exp \left\{ -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \alpha^2 t \right\}$$

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$$

уравн. (1)-(3)

уравн. (1)-(3) зависит от λ .

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \alpha^2 t}$$

Мисли, пети (1) & биде,
уравн. (1)-(3)!

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x) \quad \left| x \sin \frac{n\pi}{l} x \right.$$

нужно $\sin$
(или $\cos$)

$$\frac{l}{2} C_n = \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds$$

Вспомогательная формула

6) $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \alpha^2 t}$

(T) (существование)

Пусть $\varphi(x) \in C^1[\bar{Q}]$,

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0.$$

Тогда ф-ция $u(x,t)$, описывающая процесс, удовлетворяющая условиям:

1) $u \in C[\bar{Q}]$

2) $u \in C^{2,1}[\bar{Q}]$

3) $u(x,t)$ удовлетворяет (1)-(4)

н.б.о.

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds = \frac{2}{l} \varphi(s) \left(-\frac{1}{\pi n} \right) \cos \frac{\pi n}{l} s \Big|_0^l + \frac{2}{\pi n} \int_0^l \varphi'(s) \cos \frac{\pi n}{l} s ds = \varphi_n'$$

т.е. (из абб. рис. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n')^2 < \infty$,
ио можно д.т., что эк-ва $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty$ эк-ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\varphi_n'| \leq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + (\varphi_n')^2 \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty$$

Поэтому, по-б.о. : $ab < \frac{1}{2} (a^2 + b^2)$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty$

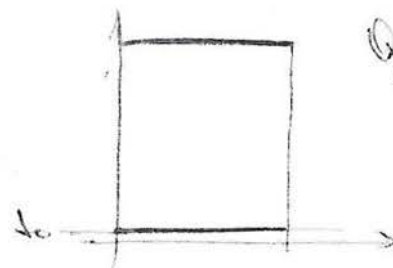
Теперь докажем существование функции:

1) $u(x,t) \in C[\bar{Q}]$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x,t) \quad \text{но упр. б.о. для эк-ва}$$

$$|A_n u_n(x,t)| \leq |A_n| \cdot 1 \cdot 1, \quad \forall (x,t) \in \bar{Q}$$

2) $u \in C^{2,1}[\bar{Q}]$



$$Q = \{(x,t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$$

Проверим, удовлетворяет ли д.т. эк-ва упр. н.б.о. эк-ва

$$\exists u_4 : u_4(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right) \times \left(-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 \right) e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t}$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_4(x,t) \right| \leq |A_n| \cdot 1 \cdot \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t} \quad \forall (x,t) \in Q_{l_0}$$

$$u \in C^{2,1}[\bar{Q}_{l_0}]$$

3) Проверим, удовлетворяет ли эк-ва

4) $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x).$

Мини

James

o) Apakah benar $0 < x < 1, t > 0$

⑦ $U(x,t) \in C^{1,2}$ and $t > 0$

$$\rightarrow u \in C^\infty \{ [a, b] \times t \geq t_0 > 0 \}$$

$$\frac{\partial^{q+p}}{\partial t^q \partial x^p} \left| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^{q+p} f_n}{\partial t^q \partial x^p} \right| \leq$$

$$A \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \left(\frac{\pi \hbar}{\ell}\right)^p + \left(\left(\frac{\pi \hbar}{\ell}\right)^2 a^2\right)^q e^{-\left(\frac{\pi \hbar}{\ell}\right)^2 a^2}$$

субъект $(\text{IP}^{+29}) \leftarrow$ фактически
"насел" из
сцене, походя
и убавлено.

Lesson 3 on 18

Применения жидкого
для упр. и тиреот.

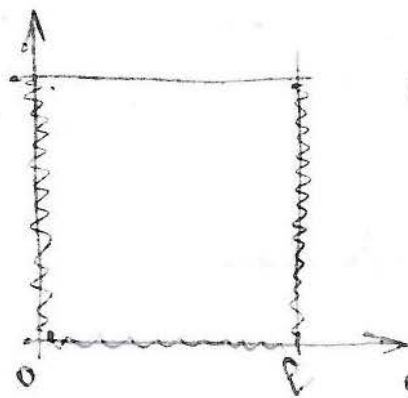
Ⓓ (примени макс. жад)

Assume $u(x,t) \in C[0,1]$

$$u(x,t) \in C^{2,1} [Q],$$
$$u_t = a^2 u_{xx}, (x, t) \in Q.$$

Por lo tanto $\max_{(x,t) \in \bar{Q}} u(x,t) = \max_{(x,t) \in F} u(x,t)$

mit $u(x, t) = u_{\text{ein}}(x, t)$
 $(x, t) \in \bar{Q}$ $(x, t) \in \mathcal{D}$


$$Q = \{ (x, f(x)) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq f(x) \leq T \}$$

$$P = Q \setminus Q$$

L. Re (old record)

$$\text{Also } \max_{(x,t) \in P} u(x,t) = 0$$
$$a \max_{(x,f) \in \bar{Q}} u(x,f) = M + \bar{G}, \quad \bar{G} \geq 0.$$

Тогда $f(x_0, t_0) \in Q$ итак, и

$$h(x_0, t_0) = M + \epsilon$$

Введём граничные функции

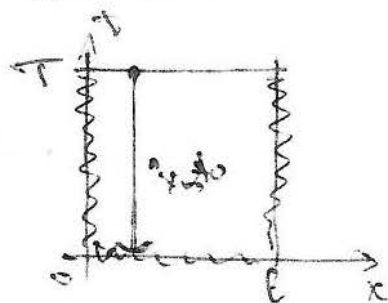
$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{x^2}{2T} (1-t_0)$$

$$v \in C[\bar{Q}], v \in C^2(Q)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{(x,t) \in \bar{Q}} v(x,t) \leq M + \frac{1}{2} \frac{x^2}{T} < M + \frac{1}{2} \frac{l^2}{T} \\ H - |t| \leq T \end{array} \right.$$

$$v(x_0, t_0) = M + \frac{1}{2} \frac{x_0^2}{T}$$

$$\max_{(x,t) \in \bar{Q}} v(x,t) = v(x_1, t_1)$$



Вспомогательная функция:

$$v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0$$

$$v(x_1, t_1) \geq 0$$

$$\rightarrow u_{xx}(x_1, t_1) = v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0$$

$$u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + \frac{x^2}{2T} \geq 0$$

$$\rightarrow u_t(x_1, t_1) = \Delta^2 u_{xx}(x_1, t_1), (x_1, t_1) \in Q$$

Вспомогательная функция, удовлетворяющая условиям.

8) Минимум есть ли?

Например, граничные функции

$$v(x,t) = -u(x,t)$$

Тогда мин $\rightarrow$ макс, а макс достигается.

Мин.

Теорема единственности
решения 1-го КЗ для
этого уравнения

(1) (единственность)

Даны функции $u_i(x,t)$, $i=1,2$ и

$$u_i \in C[\bar{Q}], u_i \in C^{2,1}(Q)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \Delta^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f(x,t) \quad (x,t) \in Q$$

$$u_i(0,t) = g_1(t)$$

$$u_i(l,t) = g_2(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u_i(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

Тогда $u_1(x,t) = u_2(x,t) \in \bar{Q}$

160

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

$$v \in C[\bar{Q}], \quad v \in C^{2,1}(Q).$$

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad (x,t) \in Q$$

$$v(0,t) = 0$$

$$v(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$v(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

нужно найти max. жад.

$$\max_{\bar{Q}} v(x,t) = \max_{\bar{Q}} v(x,t) = 0.$$

$$\min_{\bar{Q}} v(x,t) = \min_{\bar{Q}} v(x,t) = 0$$

$$\rightarrow v(x,t) \equiv 0 \in Q.$$

Мин

[3]

Требуется доказать, что
вспомогательная функция
вспомогательная функция

Лемма

Пусть $u_i(x,t)$, $i=1,2$, и т.д.

$$u_i \in C[\bar{Q}], \quad u_i \in C^{2,1}(Q),$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \geq 0, \quad (x,t) \in Q,$$

$$u_1(x,t) \geq u_2(x,t), \quad (x,t) \in \bar{Q}.$$

Тогда $u_1(x,t) \geq u_2(x,t)$ (беспокойство
вспомогательная функция) для $(x,t) \in \bar{Q}$.

160

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t).$$

$$v \in C[\bar{Q}], \quad v \in C^{2,1}(Q).$$

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad (x,t) \in Q$$

$$v(x,t) \geq 0$$

$$\min_{\bar{Q}} v(x,t) =$$

$$\min_{\bar{Q}} v(x,t) \geq 0.$$

Мин

1) (генерализация)

Ищем функцию $u_i(x, t)$, $i=1, 2$

$$u_i \in C(\bar{Q}), u_i \in C^{2,1}(Q)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, (x, t) \in Q$$

$$u_i(x, 0) = \mu_{1i}(t)$$

$$u_i(l, t) = \mu_{2i}(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\text{То есть } \max_{(x, t) \in \bar{Q}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq$$

$$\Rightarrow \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} |\mu_{11}(t) - \mu_{12}(t)|, \max_{t \in [0, T]} |\mu_{21}(t) - \mu_{22}(t)|, \right.$$

$$\left. \max_{x \in [0, l]} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \right\}.$$

А-601

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

$$u \in C(\bar{Q}), u \in C^{2,1}(Q)$$

$$u_t = a^2 u_{xx}, (x, t) \in Q$$

$$\max \{ \dots \} = m$$

$$u^+(x, t) = m$$

$$u^-(x, t) = -m$$

$$u^+, u^- \in C(\bar{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$$

границы неограниченности, $u \geq u^+ = \text{const.}$

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u^\pm}{\partial x^2}, (x, t) \in Q$$

$$u(x, t) \leq m \text{ на } \Gamma$$

$$\text{аналог. } u \geq -m \text{ на } \Gamma$$

$$\text{дополн. неогр. } u(x, t), u^+(x, t)$$

$$u(x, t) \leq u^+(x, t) \text{ на } \Gamma$$

неогр. снизу. Аналог.

$$u(x, t) \leq u^+(x, t) \in \bar{Q}.$$

Аналогично

$$u^-(x, t) \leq u(x, t) \in \bar{Q}.$$

$\Rightarrow$

$$-m \leq u(x, t) \leq m \in \bar{Q}.$$

$$\textcircled{6} \quad |u(x,t)| \leq m \in \overline{\mathbb{Q}}$$

↓

$$\max |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq m$$

Мин

Т (Компактность ОДЗ)

Ищем функции $u_i(x,t)$, $i=1,2$

$$\text{н.з.} \quad u_i + \frac{\partial u_i}{\partial x} \in C[\overline{Q}]$$

$$u_i \in C^{2,1}[\overline{Q}]$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f(x,t) \quad (x,t) \in Q$$

$$L_1 u_i(x,t) - \beta_1 \frac{\partial u_i}{\partial x}(0,t) = \Theta_1(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

$$L_2 u_i(l,t) + \beta_2 \frac{\partial u_i}{\partial x}(l,t) = \Theta_2(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u_i(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\text{Тогда} \quad u_1(x,t) = u_2(x,t) \in \overline{Q}$$

Д.Бор $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in Q$$

$$L_1 v(x,t) - \beta_1 v_x(0,t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T$$

$$L_2 v(l,t) + \beta_2 v_x(l,t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T$$

$$v(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

Компактность приведения ОДЗ
н.з. для уравн. теплопровод.

ОДЗ

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in Q$$

$$L_1 u(0,t) - \beta_1 u_x(0,t) = \Theta_1(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

$$L_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = \Theta_2(t)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$a_1 > 0$$

$$\beta_1 > 0$$

$$a_2 + \beta_2 > 0$$

$$l > 0$$

$$\Delta u = a^2 \Delta_{xx} u \quad | \cdot 2u; \int_0^l \int_0^T ;$$

"more described"

$$\int_0^l \int_0^T 2u(x,T) \Delta u(x,T) dx dT \stackrel{!}{=} \int_0^l \int_0^T 2a^2 u(x,T) \Delta_{xx} u(x,T) dx dT \stackrel{!}{=}$$

"more described"
"more described"
"more described"

$$\stackrel{!}{=} \int_0^l \int_0^T 2a^2 u(x,T) \Delta_{xx} u(x,T) dx dT$$

$$\stackrel{!}{=} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} (u^2(x,T)) dx$$

"more described"

$$\Rightarrow \int_0^l [u^2(x,T) - u^2(x,0)] dx =$$

$$= \int_0^l \left[\int_0^T 2a^2 u(x,T) \Delta_{xx} u(x,T) dx dT - 2a^2 \int_0^l u_x(x,0)^2 dx \right] dT$$

$$\rightarrow x=l: 2a^2 u(l,T) u_x(l,T) \stackrel{?}{\leq} 0 \quad (\text{use b.c.})$$

(1) If $\beta_1 = 0, \beta_2 > 0$ $u(l,t) = 0$

(2) If $\beta_1 > 0 \Rightarrow u_x(l,t) = \frac{\beta_2}{\beta_1} u(l,t)$

$$\Rightarrow 2a^2 u(l,t) u_x(l,t) = \frac{\beta_2}{\beta_1} 2a^2 u^2(l,t) \leq 0.$$

$$x=0: -2a^2 u(0,t) u_x(0,t) \stackrel{?}{\leq} 0$$

(1) $\beta_1 = 0$ $u(0,t) = 0$ w

(2) $\beta_1 > 0$ $u_x(0,t) = \frac{\beta_1}{\beta_2} u(0,t)$

$$-2a^2 u(0,t) u_x(0,t) = -2a^2 \frac{\beta_1}{\beta_2} (u(0,t))^2 \leq 0.$$

$$\int_0^l (u(x,T))^2 dx = 2a^2 \int_0^l \int_0^T u_x(x,T) dx dT + \int_0^l 2a^2 u(0,T) u_x(0,T) dT - \int_0^l 2a^2 u(l,T) u_x(l,T) dT$$

For $\beta_1 = 0$ and $\beta_2 > 0 \Rightarrow$ For $u(l,t) = 0$

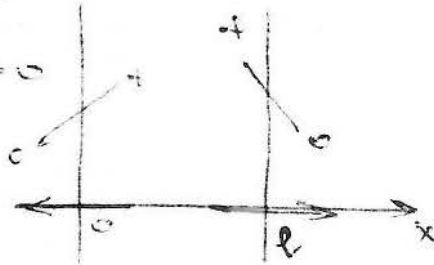
$$u(x,t) \equiv 0 \quad \& \quad \underline{u(0,t)}.$$

Λεμμα 4 om 25.09.14

"Πορμενισ" κ $\oplus$! 083:

$$\begin{cases} \alpha_1 u(x,t) - \beta_1 u_x(x,t) = 0 \\ \alpha_2 u(x,t) - \beta_2 u_x(x,t) = 0 \end{cases}$$

Γενικ: Γενικ
κινει, ο κινει
κινει, ο κινει
κινει, ο κινει
κινει, ο κινει



κινει Γενικ

Μεθο πορμενισ κινει:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = -\lambda^2$$

Τ. κ. κ. κ. κ.
(κινει), κ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$X(x) = e^{-i\lambda x}, \quad T(t) = C e^{-\alpha^2 \lambda^2 t}$$

$$u(x,t) = A(\lambda) e^{-i\lambda x} e^{-\alpha^2 \lambda^2 t}$$

κινει Γενικ πορμενισ

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{-i\lambda x} e^{-\alpha^2 \lambda^2 t} d\lambda$$

κινει Γενικ πορμενισ

$$u(x,0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda$$

κινει Γενικ πορμενισ

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\lambda \xi} d\xi$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\lambda \xi} d\xi e^{-i\lambda x} e^{-\alpha^2 \lambda^2 t} d\lambda$$

[5]. Γκ Γενικ κινει Γενικ

$$\begin{aligned} (1) & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty \\ (2) & u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

Ορμ Γενικ $u(x,t)$ κινει
κινει Γενικ (1), (2), κινει $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$,
 $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, $|u(x,t)| \leq M \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$,
 $u(x,t)$ κινει (1), (2).

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(\xi) d\xi = G(x, \xi, t)$$

$G(x, \xi, t)$: occupation $x, \xi \in D$
 $t > 0$

Опр. Введи в форму

Одн-на
в заклкн.
верхней
и/на

Then $\varphi(x) \in \mathcal{C}(P)$,

Тогда f -числа $U(x, t)$, $\text{sup. } f\text{-mod } (E)$,
абс. раз g_k (1), (2).

Merely prove $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ $\rightarrow$ (Baird)

$$Q_{\frac{1}{2}}(x, \xi, t) = a^2 Q_{xx}(x, \xi, t)$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{r^{3/2}} \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} + \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{(x-a)}{4a^{3/2}} \right]$$

$$C_x = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left(-\frac{2(x-\bar{x})^2}{4a^2} \right) \right]$$

$$G_{xx} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \left[\frac{1}{r^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{4(x-E)^2}{16a^2} \right\} - \frac{1}{r^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{2}{4a^2} \right\} \right]$$

Формула Даламбера:

$$u - a^2 u_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} [G_{\eta} - a^2 G_{\eta\eta}] \varphi(\xi) d\xi = 0$$



Докажем Д-а, в макс. нормированной и в то время

(применяем (1) о дифф. уравнениях на макс. пр.).

Докажем, что $u(x,t) \in \text{нпр}$

$$(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

$$u \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$$

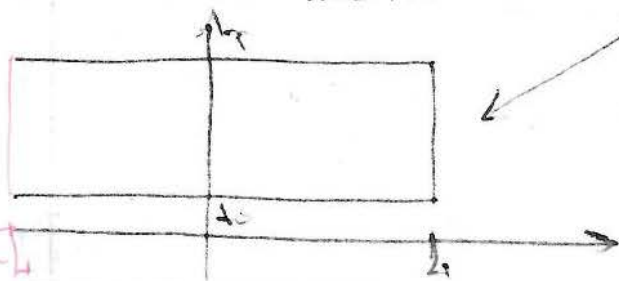
$$\left[\begin{array}{l} \text{sup } u \text{ на } \\ \text{в окрестности} \\ \text{в } u/\eta \end{array} \right]$$



Фактически доказ

$$Q_{L,T} = \{(x,t), |x| \leq L, 0 \leq t \leq T\}$$

$$u \in C(\overline{Q_{L,T}})$$



Можно
берем нпр,
что, нормирован
и ограничен
(.) в окрестности
"мн."

$$G(x, \xi, t) \varphi(\xi) \text{ на } \text{нпр } (x,t) \in Q_{L,T}, \xi \in \mathbb{R}$$

(Менее, в макс.)

смысл $\int dx, \text{ на } \text{нпр}$.

Use нпр. Берем парам.

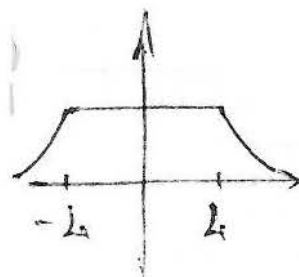
$$|G(x, \xi, t)| |\varphi(\xi)| \leq F(\xi)$$

$$\forall x, t \in Q_{L,T}, \xi \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) d\xi < \infty$$

Докажем, что макс. нормированная
уравнения:

$$F(\xi) = \begin{cases} M & \text{если } |\xi| \leq L \\ \frac{M}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(L-\xi)^2}{4a^2 T}\right\} & \text{если } \xi \geq L \\ \frac{M}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(L+\xi)^2}{4a^2 T}\right\} & \text{если } \xi \leq -L \end{cases}$$



$$|G(x, \xi, t)| \leq F(\xi)$$

$$\Rightarrow \int G \varphi d\xi \text{ p.c.} \Rightarrow u(x,t) \text{ на } \text{нпр. } Q_{L,T}$$

Далее, $u \in C^{2,1} \{ Q_{1,t_0} \}$.

"Бессмысленное утверждение":

$$|G_1(x, \xi, t) \varphi(\xi)| \leq M \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4a^2} f(\xi) + f(\xi) \cdot \frac{(1+|\xi|)^2}{4a^2 t_0^2} \right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\xi) d\xi < \infty.$$

↓

$G_1 \ni u$ ex $\in Q_{1,t_0}$. Аналогично G_x, G_{xx} удовлетворяют аналогичным условиям.

Далее, по теореме о продолжении функции $u \in C^{2,1} \{ D \times D^+ \}$.

$$u \in C \{ D \times D^+ \}$$

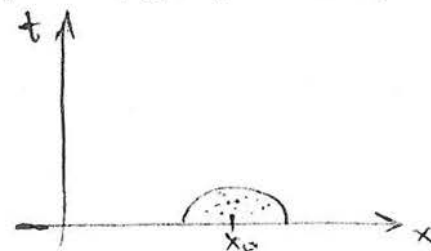
$$|u(x, t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) |\varphi(\xi)| d\xi$$

$$= M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right\} d\xi = M \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = M.$$

Докажем, что $u \in C \{ D \times D^+ \}$.

непрерывность функции u в точке (x_0, t_0) .

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ x \rightarrow x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0) \quad \forall x_0 \in D$$



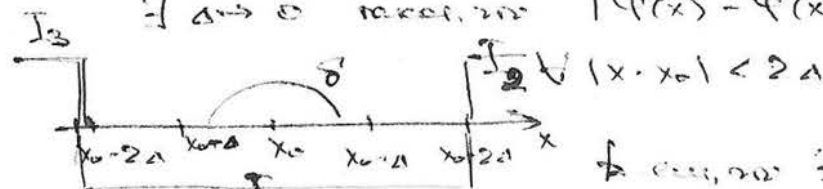
"Правильное утверждение":

Функция u непрерывна в точке (x_0, t_0) .

Вспомогательная лемма.

Для $\varphi(x)$ непрерывной в x_0 , $\forall \epsilon > 0$

$\exists \delta > 0$ такое, что $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \epsilon$



$|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \epsilon$, $(x, t) \in I_2$,

$I_2: (x - x_0)^2 + t^2 < \delta^2, t > 0$.

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \varphi(x_0) d\xi \right| \leq$$

поэтому
↓ и не знаем
и поэтому
обозначим

$$\int_{x_0-2\Delta}^{x_0+2\Delta} G(x, \xi, t) 2M d\xi \quad (1)$$

||
 I_2

$$(1) \int_{x_0-2\Delta}^{x_0+2\Delta} G(x, \xi, t) 2M d\xi + \int_{x_0-2\Delta}^{x_0+2\Delta} G(x, \xi, t) \underbrace{|\varphi(\xi) \cdot \varphi(x_0)|}_{\leq \frac{1}{3}} d\xi$$

||
 I_2

$$|I_1| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

$$k_0 = (x - x_0)^2 + t^2 \leq \delta^2, \delta < \Delta$$

$$I_2 = 2M \int_{x_0-2\Delta}^{x_0+2\Delta} G(x, \xi, t) d\xi = 2M \int_{x_0-2\Delta}^{x_0+2\Delta} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} d\xi$$

делаем
замену
 $\xi = \frac{x-\eta}{\sqrt{4a^2 t}}$
 $d\xi = \frac{1}{\sqrt{4a^2 t}} d\eta$

$$2M \int_{\frac{x_0-2\Delta-\sqrt{4a^2 t}}{\sqrt{4a^2 t}}}^{\frac{x_0+2\Delta+\sqrt{4a^2 t}}{\sqrt{4a^2 t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} d\eta$$

Величины,
где x "сидит"
в δ -окр. x_0 и
"не допрыгает" до
до $(-x_0 + \Delta)$.

$$\Downarrow$$

$$x_0 - 2\Delta - x \gg \Delta > 0$$

Тогда, если $\delta \rightarrow 0, t \rightarrow 0$

$$\frac{1}{t} \rightarrow +\infty$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a^2 t}}$$

где I_3 обозначает аналогичную
часть: $I_3 \leq \frac{\epsilon}{3}$

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| \leq \epsilon$$

Читайте

Об. 60 $G(x, \xi, t)$!

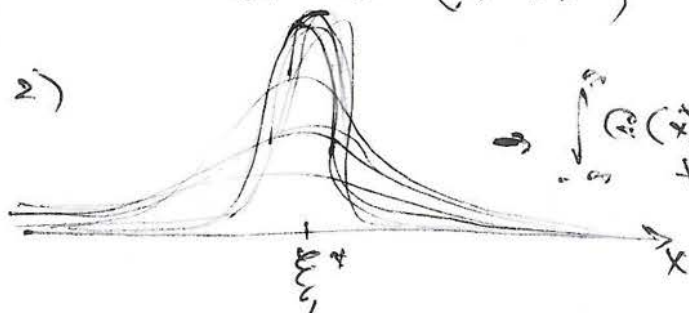
$$1) G(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\}$$

и φ —
сильно непрерывная
функция

$$G(x, \xi, t) = G(\xi, x, t) \quad G(x, \xi, t) > 0$$

$$G \in C^\infty(D^2 \times D^1)$$

2)



$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi \xrightarrow{t \rightarrow 0} \varphi(x^*)$$

Лекция 5

05.02.17

I (Смешанная пара ЗК)

Пусть $u_i(x,t)$, $i=1,2$ заданы, то

$$u_i(x,t) \in C[\bar{R} \times \bar{R}^+]$$

$$u_i(x,t) \in C^{2,1}[\bar{R} \times \bar{R}^+]$$

$$|u_i(x,t)| \leq M_i, \quad \forall (x,t) \in \bar{R} \times \bar{R}^+$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in R \times R^+$$

$$u_i(x,0) = \varphi(x), \quad x \in R$$

$$\text{Тогда } u_1(x,t) = u_2(x,t), \quad (x,t) \in \bar{R} \times \bar{R}^+$$

Р-во: $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$

$$v \in C[\bar{R} \times \bar{R}^+], \quad v \in C^{2,1}[\bar{R} \times \bar{R}^+]$$

$$|v(x,t)| \leq M = M_1 + M_2, \quad \forall (x,t) \in \bar{R} \times \bar{R}^+$$

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad (x,t) \in R \times R^+$$

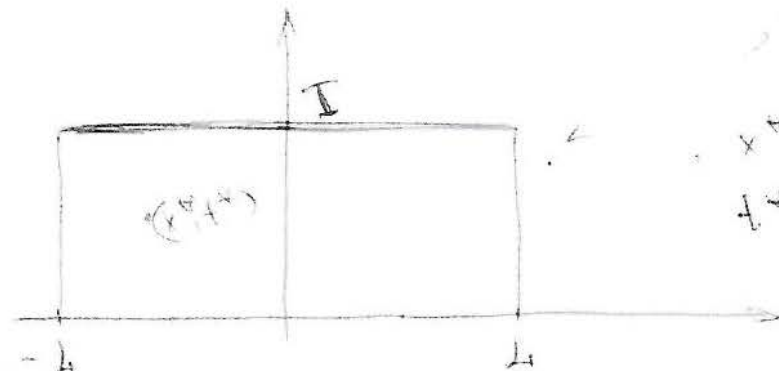
$$v(x,0) = 0, \quad x \in R$$

Покажем 0-ю, то $(v(x,t) = 0)$

for the "new problem"

$$\exists (x^*, t^*) \in [R, \times R^+]$$

$$\text{w.r. } v(x^*, t^*) = \delta > 0$$



$$\bar{\Pi}_{L,T} \ni (x^*, t^*)$$

$$x^* \in (-L, L)$$

$$t^* \in (0, T)$$

Введём функцию δ -функцию:

$$w(x,t) = \frac{2M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right)$$

$$w \in C[\bar{\Pi}_{L,T}], \quad w \in C^{2,1}[\bar{\Pi}_{L,T}]$$

$$w(-L, T) \geq M, \quad \forall t \in [0, T]$$

$$w(x, 0) \geq 0, \quad x \in [-L, L]$$

$$\exists v_t = a^2 v_{xx}, \quad -L \leq x \leq L, \quad t \in (0, T]$$

$$v \in C[\bar{\Pi}_{L,T}],$$

$$v \in C^{2,1} \{ [-L, L] \times (0, T] \}$$

По Лемме (ср-е из упражнения 1.2.10)
 т.е. на $\mathbb{R}^n$ выполняется



$$u(x,t) \geq w(x,t),$$

но это не будет "исключением" на $\mathbb{R}^n$ из-за:

$$\forall (x,t) \in \bar{\Pi}_{LT}.$$

$$\Rightarrow u(x,t) \leq w(x,t) = \frac{2M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} - a^2 t \right) \quad \forall x \in [L, L], \quad \forall t \in [0, T].$$

Вот так
 $\rightarrow$
 (1) (x^*, t^*)

$$u(x^*, t^*) \leq w(x^*, t^*) =$$

$$= \frac{2M}{L^2} \left(\frac{(x^*)^2}{2} - a^2 t^* \right)$$

$$\forall L: x^* \in [L, L]$$

"предельный"
 из-за Π_{LT}

$$\exists L \rightarrow -\infty$$

$$u(x^*, t^*) \leq w(x^*, t^*) = \frac{2M}{L^2} () \rightarrow 0.$$

Мин

[6]. Метод продолжения решения КЗ
 для уравнения теплопроводности на $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ЗК

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right\} \varphi(\xi) d\xi$$

Рассм. 1 КЗ ($x > 0$):

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x > 0 \end{cases}$$

$\varphi(0) = 0$

Рассм. (бесконечный) ЗК для $u(x,t)$:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ -\varphi(x), & x < 0. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right\} \Phi(\xi) d\xi$$

Теперь

$$\exists U(x,t) = U(x,t), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0$$

$$U(x,0) = U(x,0) = \varphi(x), \quad x \geq 0$$

$$U(x,t) = U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{4a^2 t} \right\} \underbrace{\left\{ \Phi(\xi) \right\}}_{\text{вер}} d\xi$$

$\int_{-\infty}^{\infty} u \text{ не имеет смысла} = 0.$
(-∞, ∞)

$$U(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right\} \varphi(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right\} (-\varphi(-\xi)) d\xi$$

$$\xi = -\xi$$

и $x \rightarrow -x$ становится $\varphi(\xi)$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp \left\{ -\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t} \right\} \varphi(\xi) d\xi$$

$$\Rightarrow U(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[\exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right\} - \exp \left\{ -\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t} \right\} \right] \varphi(\xi) d\xi$$

Рассм. 2к3 ($x > 0$):

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, & x > 0, t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} U_x(0,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x), & x \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Рассм. (вспомогат.) $U(x,t)$:

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \end{cases}$$

$$U(x,0) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ \varphi(-x), & x \leq 0 \end{cases}$$

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right\} \Phi(\xi) d\xi$$

$$U(x,t) = U(x,t), \quad x \geq 0, t \geq 0$$

(1), (3) совм. с учетом аб. в формулу $U(x,t)$

$$U_x(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right\} \cdot$$

$$\left(-\frac{2(x-\xi)}{4a^2 t} \right) \Phi(\xi) d\xi$$

$$U_x(0,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{4a^2 t} \right\} \underbrace{\frac{\xi}{2a^2 t}}_{\text{вер}} \underbrace{\Phi(\xi)}_{\text{вер}} d\xi \xrightarrow[(-\infty, \infty)]{\text{вер}} 0$$

$$u(x,t) = \int_0^l \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(-\xi) d\xi$$

$$u(x,t) = \int_0^l \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} + \exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right\} \right] \varphi(\xi) d\xi.$$

7) Интегральные представления
для решения ЛКЗ.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$$

$$G(x, \xi) = G(\xi, x),$$

$$G_t = a G_{xx}$$

$$G > 0, t > 0 \quad G \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+).$$

ЛКЗ:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l, \\ & t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

(прим. — см. Лемма 2)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \in$$

$$\Leftrightarrow \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi.$$

$$G(x, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} \xi e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t}$$

$$\text{при } t > t_0: |G(x, \xi, t)| \leq \frac{2}{l} e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 t_0}$$

$$G \in C^\infty([0, l] \times \mathbb{R}^+)$$

$$G(x, \xi, t) = G(\xi, x, t).$$

$$G_t = a^2 G_{xx}$$

$$U(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(-\xi) d\xi$$

$$U(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} + \exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right\} \right] \varphi(\xi) d\xi.$$

17) Аддитивные представления
для решения 1КЗ.

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$$

$$G(x, \xi) = G(\xi, x),$$

$$G_t = a G_{xx}$$

$$G > 0, t > 0 \quad G \in C^{\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+).$$

1КЗ:

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} & 0 < x < l \\ U(0,t) = 0 & t > 0 \\ U(l,t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ U(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

(прим. — см. Лекция 2)

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$\equiv \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi.$$

$$G(x, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} \xi e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t}$$

$$\text{при } t > 0: |G(x, \xi, t)| \leq \frac{2}{l} e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 t}$$

$$G \in C^{\infty}([0, l], t > 0)$$

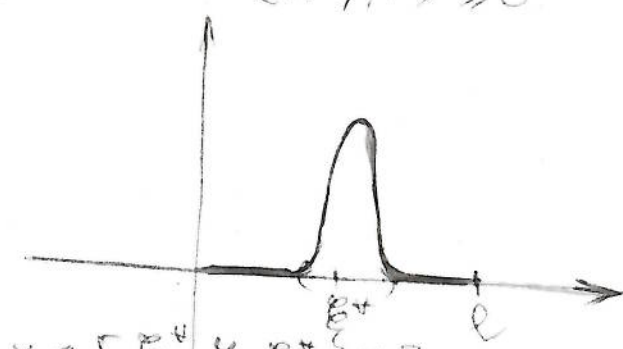
$$G(x, \xi, t) = G(\xi, x, t)$$

$$G_t = a^2 G_{xx}$$

Условия, что $G(x, \xi, t) \geq 0$

$$\xi^* \in (a, b)$$

Условия
φ-инт



$$\varphi_{\xi}(x) = \begin{cases} \varphi_{\xi^*}(x), & x \in [\xi^* - \delta, \xi^* + \delta] \\ 0, & [a, b] \setminus (\xi^* - \delta, \xi^* + \delta) \end{cases}$$

$$\int_{\xi^* - \delta}^{\xi^* + \delta} \varphi_{\xi^*}(\xi) d\xi = 1$$

$$u_{\xi}(x, t)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_{\xi}}{\partial x^2}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u_{\xi}(0, t) = u_{\xi}(l, t) = 0, & t > 0 \\ u_{\xi}(x, 0) = \varphi_{\xi}(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

$$u_{\xi}(x, t) \geq 0, x \in [a, b], t \geq 0 \quad \forall \xi > 0$$

no up my max near (b) → depends
on up-κ).

$$u_{\xi}(x, t) = \int_0^{\infty} G(x, \xi, t) \varphi_{\xi}(\xi) d\xi =$$

$$= \int_{\xi^* - \delta}^{\xi^* + \delta} G(x, \xi, t) \varphi_{\xi^*}(\xi) d\xi \quad \text{①} \text{ — up max near } \xi^* - \delta$$

$$\begin{aligned} & \int_{\xi^* - \delta}^{\xi^* + \delta} G(x, \xi, t) \varphi_{\xi^*}(\xi) d\xi = \\ & \int_{\xi^* - \delta}^{\xi^* + \delta} G(x, \xi^*, t) \varphi_{\xi^*}(\xi) d\xi = \\ & = G(x, \xi^*, t) \end{aligned}$$

$$u_{\xi}(x, t) = G(x, \xi^*, t) \stackrel{\text{②}}{=} \underline{G(x, \xi^*, t)}$$

Часть II

Лекция 6
от 09.10.17

Уравнения Лапласа и Пуассона

1) Ур-я Лапласа и Пуассона
постановка граничных задач

$U(x, y, z)$

(Ур-е не зависит
от времени)

$\Sigma^3: 0 = \Delta U + f(x, y, z) \quad [U|_{\Sigma} = a^2 \Delta U + f(x, y, z)]$

$\Delta U = -f(x, y, z)$

- ур Пуассона

$\Delta U = 0$

- ур Лапласа

$\Sigma^2: U(x, y)$

$\Delta U = -f(x, y)$
 $\Delta U = 0$

Лапласовские функции в E^n
 $U(x_1, \dots, x_n)$

Опр Ф-ция $U(x_1, \dots, x_n)$ называется
лапласовской в обл D , если

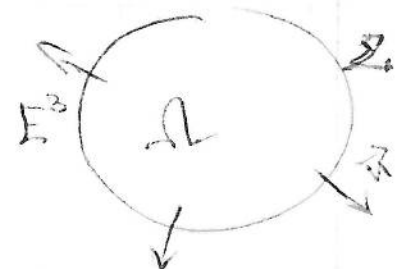
$U \in C^2(D), \Delta U = 0 \in D,$

где $\Delta U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}$ в E^n .

(оператор Лапласа)

Задачи в E^3

Внутр. г. Дирихле
для ур-я Лапласа:



Найти $U(x, y, z): \Delta U = 0 \in D$

[для ур Пуассона]
 $\Delta U = -f \in D$

$U(x, y, z) = \varphi(x, y, z),$
 $(x, y, z) \in \Sigma$

Внутр. г. Неймана:

Найти $U(x, y, z): \Delta U = 0 \in D$

$\frac{\partial U}{\partial n}(x, y, z) = \psi(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$

Часть II

Лекция 6
от 09.10.17

Уравнения Лапласа и Пуассона

1. Ур-я Лапласа и Пуассона;
основные задачи

$$u(x, y, z)$$

(Ур-е не зависит
от времени)

$$E^3: 0 = a^2 \Delta u + f(x, y, z) \quad [u|_D = a^2 \Delta u + f(x, y, z)]$$

$$\Delta u = -f(x, y, z)$$

- ур. Пуассона

$$\Delta u = 0$$

- ур. Лапласа

$$E^2: u(x, y)$$

$$\Delta u = -f(x, y)$$

$$\Delta u = 0$$



Лапласовская функция в E^n

$$u(x_1, \dots, x_n)$$

Опр. Функция $u(x_1, \dots, x_n)$ называется
лапласовской в области D , если

$$u \in C^2(D), \Delta u = 0 \text{ в } D,$$

$$\text{где } \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \text{ в } E^n.$$

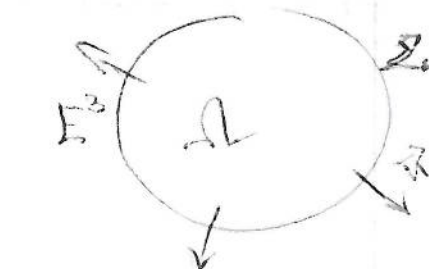
(оператор Лапласа)

Задачи в E^3

Внутр. г. Дирихле
для ур-я Лапласа:

Найти $u(x, y, z): \Delta u = 0 \text{ в } D$

[для ур. Пуассона
 $\Delta u = -f \text{ в } D$]



$$u(x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma$$

Внутр. г. Неймана:

Найти $u(x, y, z): \Delta u = 0 \text{ в } D$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma$$

Внешнее г. Дирихле
для гг. Лапласа:

Найти $U(x, y, z)$: $\Delta U = 0$ в $E^3 \setminus \bar{\Omega}$

$$U(x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma$$

"Вспомогательная функция вне,
на пов. и границах
заданных значений".

Внеш. г. Неймана:

Найти $U(x, y, z)$: $\Delta U = 0$ в $E^3 \setminus \bar{\Omega}$

"нормальная производная" $\rightarrow \frac{\partial U}{\partial n}(x, y, z) = \psi(x, y, z)$
 $(x, y, z) \in \Sigma$

Задачи в E^2



Внутр. г. Дирихле
для гг. Лапласа:

Найти $U(x, y)$: $\Delta U = 0$ в D

$$U(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in L$$

U на ∂ .

[2] Фундаментальные решения
гг. Лапласа в E^3 и E^2

$$E^3: \quad \Delta U = 0, \quad U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$$

$$E^2: \quad \Delta U = 0, \quad U_{xx} + U_{yy} = 0$$

$$(E^3) \quad M(x, y, z) \quad M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$R_{mm_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

г. Неймана

Фунд. реш. гг. Лапласа в E^3 :

$$\frac{1}{R_{mm_0}} = U_f(x, y, z)$$

д-во:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_{mm_0}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{R_{mm_0}^3} \cdot 2(x-x_0)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R_{mm_0}} \right) = +\frac{3}{2} \frac{1}{R_{mm_0}^5} (x-x_0)^2 - \frac{1}{R_{mm_0}^3}$$

$$\Delta \left(\frac{1}{R_{mm_0}} \right) = \frac{3(x-x_0)^2}{R_{mm_0}^5} - \frac{1}{R_{mm_0}^3} + \frac{3(y-y_0)^2}{R_{mm_0}^5} -$$

$$- \frac{1}{R_{mm_0}^3} + \frac{3(z-z_0)^2}{R_{mm_0}^5} - \frac{1}{R_{mm_0}^3} = 0$$

$$\textcircled{E} \quad \frac{3}{R^5} \int \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \, dV - \frac{3}{R^3} = 0.$$

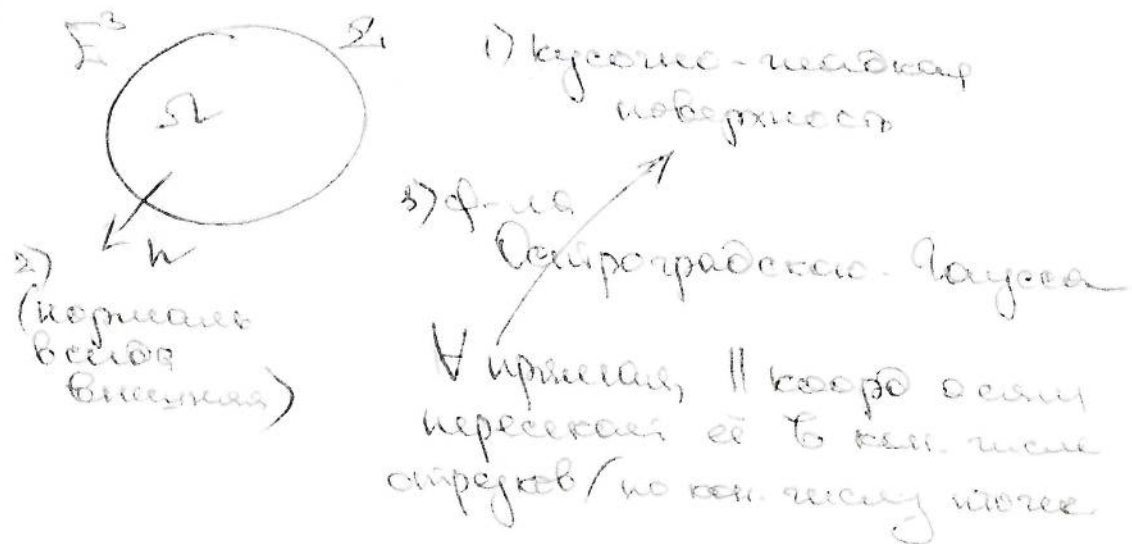
Минус

$$\textcircled{E^2} \quad \rho_{\text{mm}} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

Минус Фунд. реш. упр-я Лапласа в E^2 —
 $-u_f(x,y) = \ln \frac{1}{\rho_{\text{mm}}}$

(Также проверяется дифференцированием)

3. Переходим к тримеру (E^3)



1. Ф-на Лапласа:

Пусть $u, v \in C^2(\Omega), \varphi \in C^1(\bar{\Omega})$

$$\vec{A}(x,y,z) = u \text{ grad } v$$

$$\frac{du}{dt} = (\vec{e} \text{ grad } u) - \text{уравновешивание}$$

$$\iint_{\Sigma} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{div } \vec{A} dV$$

$$(\vec{A}, \vec{n}) = (u \text{ grad } v, \vec{n}) = u (\text{grad } v, \vec{n}) = u \frac{\partial v}{\partial n}$$

~~Выводим из формулы~~

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= u \Delta v + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} = \\ &= u \Delta v + (\text{grad } u, \text{grad } v) \end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = \iiint_{\Omega} u \Delta v dV + \iiint_{\Omega} (\text{grad } u, \text{grad } v) dV}$$

2^{ая} Ф-на Армина:

$$\iint_{\Sigma} \sqrt{\frac{\partial u}{\partial n}} d\sigma = \iiint_{\Omega} \Delta u dT + \iint_{\Sigma} (\text{grad} u, \text{grad} u) dT$$

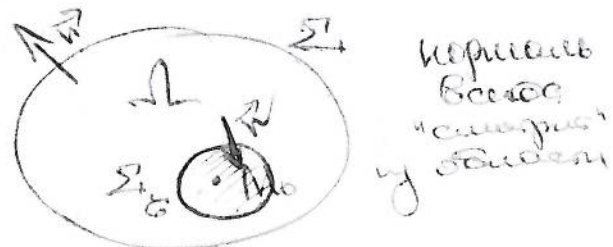
$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$$

$$\boxed{\iint_{\Omega} (u \Delta u - \Delta u u) dT = \iint_{\Sigma} (u \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} u) d\sigma}$$

3^я (основная) Ф-на Армина:

$$u(x, y, z)$$

$$A(x, y, z) = \frac{1}{R_{MM_0}}$$



Ф-на 1 "механ" → берем точку $M_0 \in \Omega$: сфера радиуса ϵ с центром в $(x_0, y_0, z_0) = M_0$ и "вырезаем" шарик Σ_ϵ из области Ω и "вырезаем" шарик Σ_ϵ

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_\epsilon} [u \Delta \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) - \frac{1}{R_{MM_0}} \Delta u] dT &= \\ &= \iint_{\Sigma_\epsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma + \iint_{\Sigma_\epsilon} [\dots] d\sigma \end{aligned}$$

В том же случае будем переходить к пределу

(1) $u \Delta \frac{1}{R_{MM_0}} \rightarrow 0$ (Особенность $\frac{1}{R}$ для Δ исчезает)

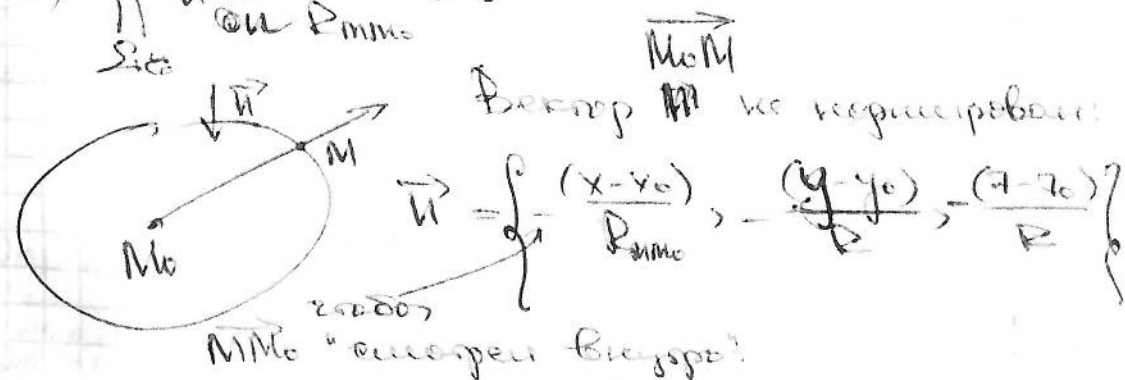
(2) Мо - внутри, а $\iint$ выходящая из области

(3) Много предельно:

a) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Sigma_\epsilon} \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \rightarrow \left| \iint_{\Sigma_\epsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \right| \leq C \frac{1}{\epsilon} \iint_{\Sigma_\epsilon} d\sigma$

$$\frac{1}{\epsilon} = C \frac{1}{\epsilon} 4\pi \epsilon^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

b) $\iint_{\Sigma_\epsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MM_0}} d\sigma$



$$\text{grad } \frac{1}{R_{mm_0}} :$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_{mm_0}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{2(x-x_0)}{R_{mm_0}^3} = -\frac{(x-x_0)}{R_{mm_0}^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(), \frac{\partial}{\partial z}() \text{ аналогично.}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{R_{mm_0}} \right) &= \left(\text{grad } \frac{1}{R_{mm_0}}, \vec{n} \right) = \\ &= \frac{(x-x_0)^2}{R^4} + \frac{(y-y_0)^2}{R^4} + \frac{(z-z_0)^2}{R^4} = \frac{1}{R_{mm_0}^2} = \frac{1}{r_0^2}. \end{aligned}$$

(Вспомогательный):

$$(\text{Т}) \text{ о среднем: } \iint_{\Sigma} f(x,y,z) dS = f(\hat{M}) \iint_{\Sigma} dS, \quad \hat{M} \in \Sigma.$$

$$\iint_{\Sigma_{r_0}} u \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{R_{mm_0}} \right) dS = \iint_{\Sigma_{r_0}} u \cdot \frac{1}{r_0^2} dS = \frac{1}{r_0^2} \iint_{\Sigma_{r_0}} u dS$$

$$= \frac{u(\hat{M})}{r_0^2} \iint_{\Sigma_{r_0}} dS = \frac{u(\hat{M})}{r_0^2} \cdot 4\pi r_0^2 = 4\pi u(\hat{M})$$

$\hat{M} \in \Sigma_{r_0} \quad \int_{\Sigma_{r_0}} 1 dS = 4\pi r_0^2 \quad \begin{matrix} \text{при } r_0 \rightarrow 0 \\ \Sigma_{r_0} \rightarrow M_0 \\ \Rightarrow \hat{M} \rightarrow M_0 \end{matrix}$

$$-\iiint_{\Omega} \frac{1}{R_{mm_0}} \Delta u dV = \iint_{\Sigma} [J] dS + \cancel{4\pi u(M_0)}$$

переходим к пределу при $r_0 \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} 4\pi u(M_0) &= -\iint_{\Sigma} [u] \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{R_{mm_0}} \right) - \frac{1}{R_{mm_0}} \frac{\partial u}{\partial n} dS - \\ &= -\iiint_{\Omega} \frac{1}{R_{mm_0}} \Delta u dV \end{aligned}$$

Лекция 7
от 16.10.14

Лемма

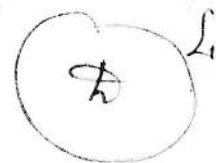
Если функция u гармоническая, то

$$4\pi u(M_0) = -\iint_{\Sigma} [u(M)] \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{R_{mm_0}} \right) - \frac{1}{R_{mm_0}} \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

интегральные представления
гармонической функции.

Рассмотрим

Функцию $u \in C^2(\Omega)$:



$u(x,y)$
 $d(x,y)$

2.1

$$\iint_{\Omega} (u_{xx} + u_{yy}) dx dy = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial d}{\partial n} - d \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

$M(x,y)$

$M(x,y)$

3.1

$$2\pi u(M_0) = - \int_{\Omega} \left[u(M) \frac{\partial}{\partial u} \right]$$

4.1. Рассмотрим гармоническую функцию

$u(x,y)$

$$z = x + iy$$

$$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$$

Согласно Коши-Римана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Введем:

функцию $f(z)$

$z \in \Omega$ (аналитическая),

$z \in \mathbb{C}$, но $f(z)$ — это u и v

гармоническая функция $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ это гармоническая



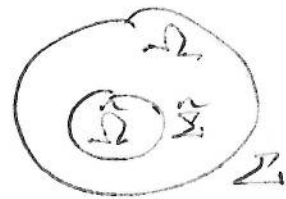
Т

Если $u(x,y,z)$ гармоническая в Ω , то

для $\forall \tilde{\Omega}$ таких, $\tilde{\Omega} \subset \Omega$

$$\iint_{\tilde{\Omega}} \frac{\partial u}{\partial n} d\tilde{s} = 0.$$

(в $\mathbb{R}^2$ аналогично)



1-го:

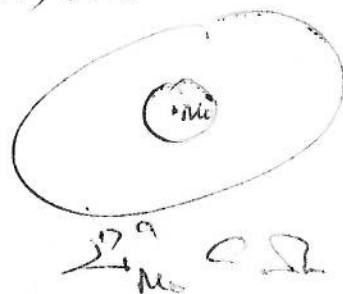
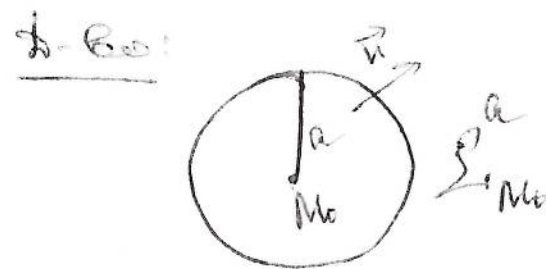
(ср-вн 2-го ф-на (прим))

● T₂ (с средним значением)

∫ u(M) dV в Ω, M₀ ∈ Ω.

Тогда
$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_{M_0}^a} u(M) dS$$

сфера с центром M₀ → $\Sigma_{M_0}^a$



3-го ф-на (прим):

$$\Delta u(M_0) = - \iint_{\Sigma_{M_0}^a} [u(M) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0 M}} \right) - \frac{1}{R_{M_0 M}} \frac{\partial u}{\partial n}] dS$$

$$\frac{1}{R_{M_0 M}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_{M_0 M}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial (x-x_0)}{R_{M_0 M}^3}$$

$$\vec{n} = \left\{ \frac{(x-x_0)}{R_{M_0 M}}, \frac{(y-y_0)}{R_{M_0 M}}, \frac{(z-z_0)}{R_{M_0 M}} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0 M}} \right) = \left(\vec{n} \text{ grad } \left(\frac{1}{R} \right) \right) =$$

$$= -\frac{(x-x_0)^2}{R^4} - \frac{(y-y_0)^2}{R^4} - \frac{(z-z_0)^2}{R^4}$$

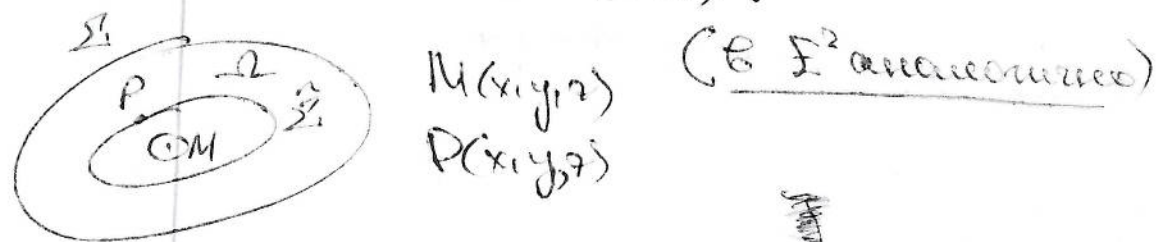
$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0 M}} \right) = -\frac{1}{R^2_{M_0 M}} = -\frac{1}{a^2}$$

$$\Delta u(M_0) = \frac{1}{a^2} \iint_{\Sigma_{M_0}^a} u(M) dS$$

уточ

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Delta M_0} u(M) d\sigma \quad \left(\text{с } \bar{\Delta} \right)$$

T₃ Если $u(M)$ гармон. в Δ ,
то $u \in C^\infty(\Delta)$.



$$u(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_1} \underbrace{u(\xi,\eta,\zeta)}_{\text{неизв.}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right)}_{\text{изв.}} d\sigma - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{\text{неизв.}} \bigg|_{\Sigma_2} d\sigma$$

Интерпретация: "очень хороши", никаких
особенностей нет. Поскольку
неизвест. ф-я известна, diff, то и
известна извест. diff.

Мног.

T₄ (Принцип макс. значения)

Пусть u гармон. в Δ и $u \in C(\bar{\Delta})$.

Тогда $\max_{M \in \bar{\Delta}} u(M) = \max_{M \in \bar{\Delta}} u(M).$

$$\min_{M \in \bar{\Delta}} u(M) = \min_{M \in \bar{\Delta}} u(M)$$

А. В.: Т.е. $u \in C(\bar{\Delta})$, то $\max$ в $\bar{\Delta}$
достигается.

Возьмем Δ и M_0 из Δ . $u(M_0) = \max_{M \in \bar{\Delta}} u(M) = A$

Пусть $M_0 \in \Delta$, $\Sigma_1^a \subset \Delta$

$$A = u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_1^a} u(M) d\sigma \leq \frac{A}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_1^a} d\sigma$$

$$\left(u(M) \right)_{\Sigma_1^a} = A \quad \left(\text{Равенство ф-лы
среднего значения} \right)$$

В силу непрерывности u можно сделать
переход: $M_n: u(M_n) = A, M_n \rightarrow M^* \in \bar{\Delta}$

$$A = u(M_n) \rightarrow u(M^*) = A. \quad \underline{\text{Мног.}}$$

Q₁

Если $u \in C(\bar{\Omega})$, то u
достигает $\max$, $\min$ на $\partial\Omega$

5) Вспомогательная функция для упр. Лапласа

Опр. Ф-я $u(x, y, z)$ назыв-ся
решением вспомог. задачи

Лапласа для упр. Лапласа, если
 $u \in C(\bar{\Omega})$, $u \in C^2(\Omega)$

$$\Delta u = 0, (x, y, z) \in \Omega$$

или
ф-ция

$$u(x, y, z) = \varphi(x, y, z), (x, y, z) \in \partial\Omega$$

(Необходимо, чтобы φ была непрерывна!)

Всегда $\exists$ решение!

⑦ Пусть $u_i(x, y, z) \quad i=1,2$

$$u_i \in C(\bar{\Omega}), u_i \in C^2(\Omega)$$

$$\Delta u_i = 0, (x, y, z) \in \Omega$$

$$u_1(x, y, z) = u_2(x, y, z) = \varphi(x, y, z), \\ (x, y, z) \in \partial\Omega$$

Тогда $u_1 = u_2$ в $\bar{\Omega}$.

Доказательство:
$$v(x, y, z) = u_1 - u_2$$

$$v \in C(\bar{\Omega}), v \in C^2(\Omega) \quad \Delta v = 0 \\ (x, y, z) \in \Omega$$

$$v(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in \partial\Omega$$

$$\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v = 0$$

$$\min_{\bar{\Omega}} v = \min_{\partial\Omega} v = 0$$

$$v(x, y, z) = 0 \\ (x, y, z) \in \bar{\Omega}$$

Утверждение

[6] Установите равенство
границ Дирихле.

Пусть $u_i(x, y, z)$, $i=1, 2$

$$u_i \in C(\bar{\Omega}), u_i \in C^2(\Omega)$$

$$\Delta u_i = 0, (x, y, z) \in \Omega.$$

Тогда если

$$u_1(x, y, z) \geq u_2(x, y, z) \text{ для } (x, y, z) \in \Sigma, \text{ и}$$

$$u_1 \geq u_2 \text{ для } (x, y, z) \in \bar{\Omega}.$$

Докажем: Положим $v(x, y, z) = u_1 - u_2$.

$$v \in C(\bar{\Omega}), v \in C^2(\Omega)$$

$$\Delta v = 0 \text{ в } \Omega.$$

Следовательно

$$\min_{\bar{\Omega}} v = \min_{\Sigma} v \geq 0.$$

$$v = u_1 - u_2 \geq 0 \text{ на } \Sigma$$

и на $\bar{\Omega}$. Мно.

Т (установлено).

Пусть $u_i(x, y, z)$, $i=1, 2$

$$u_i \in C(\bar{\Omega}), u_i \in C^2(\Omega)$$

$$\Delta u_i = 0, (x, y, z) \in \Omega$$

$$u_i(\cdot) = \varphi_i(\cdot), (x, y, z) \in \Sigma.$$

Тогда

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_1 - u_2| \leq \max_{(\cdot) \in \Sigma} |\varphi_1 - \varphi_2|.$$

Докажем: $v(x, y, z) = u_1 - u_2$

$$v \in C(\bar{\Omega}), v \in C^2(\Omega)$$

$$\Delta v = 0, (x, y, z) \in \Omega.$$

$$M = \max_{\Sigma} |\varphi_1 - \varphi_2|$$

$$v^+(\cdot) = M, v^-(\cdot) = -M$$

$$v^+, v^- \in C(\bar{\Omega}) \in C^2(\Omega).$$

$$\Delta v^+ = 0, \Delta v^- = 0, (\cdot) \in \Omega.$$

(Σ, V^+) :

$$N \in N^+ = \mathcal{G} \text{ на } \Sigma$$

↓ Лемма

$$N \in N^+ = \mathcal{G} \in \bar{\Omega}$$

(Σ, V^-) : аналогично.

М.О.

Лемма 2

от 23.10.17

[7] Вспомогательная лемма



$\mathbb{R}^3$

не basta
есть решение!

(см. теорему о разрешимости)

Доп. Пусть $u(x, y, z)$ является

решением ВЗ Насимана, если:

$$u \in C^1(\bar{\Omega}), u \in C^2(\Omega)$$

$$\Delta u = 0, (x, y, z) \in \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = \psi(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$$

(I) (единственность)

Пусть $\exists u_i(x, y, z), i = 1, 2$ и т.

$$u_i \in C^1(\bar{\Omega}), u_i \in C^2(\Omega)$$

$$\Delta u_i = 0, (x, y, z) \in \Omega$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n}(\cdot) = \psi(\cdot), (\cdot) \in \Sigma$$

Реш.
ВЗ Н
единств.
с нулевым
св. осевым
const.

$$\text{Тогда } u_1(x, y, z) - u_2(\cdot) = \text{const}$$

Д.В.О.

1-й шаг: функция u такая:

$$\text{Д.В.О. } u(x, y, z) =$$

$$u(x, y, z) = u(x, y, z)$$

$$\iint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} d\tau =$$

$$\stackrel{\circ}{=} \iiint_{\Omega} u \Delta u d\tau + \iiint_{\Omega} (\text{grad } u, \text{grad } u) d\tau =$$

$$\iiint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) d\tau = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \rightarrow u(x, y, z) = \text{const.}$$

М.О.

2) Ассое. граничные представления ВЗН

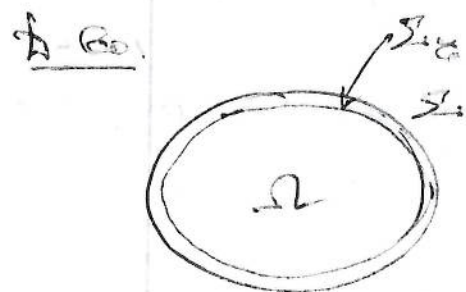
Ⓓ

Пусть $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $\psi \in C^2(\Omega)$

$$\Delta u = 0, (x, y, z) \in \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = \psi(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \Sigma$$

Тогда $\iint_{\Sigma} \psi dS = 0$



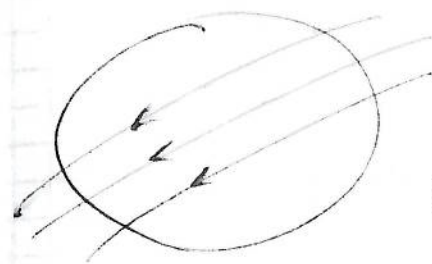
$$\iint_{\Sigma_{\pm}} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

$\psi \rightarrow 0$

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

$$\iint_{\Sigma} \psi dS = 0$$

Линд



Векторное поле
на сфере,

U - касательная.

$$\iint_{\Sigma} \psi dS = 0 \Rightarrow \text{"Граничные условия"} \Rightarrow \text{"Граничные условия"} \Rightarrow \text{"Граничные условия"}$$

Векторное поле на сфере

Векторное поле Дирака в E^3

Пусть $u(x, y, z)$ касательное
поле на сфере, где

$$u \in C(E^3 \setminus \Omega), \psi \in C^2(E^3 \setminus \Omega)$$

$$\Delta u = 0, (x, y, z) \in E^3 \setminus \Omega$$

$$u(x, y, z) = \psi(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \Sigma$$

$$|u(x, y, z)| \rightarrow 0 \text{ при } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$$

$$(\forall \epsilon > 0 \exists A: x^2 + y^2 + z^2 \geq A \Rightarrow |u(x, y, z)| < \epsilon)$$

У (единственность)

Пусть $u_i(x, y, z)$ с.з. $(i=1, 2)$

$$u_i \in C(E^3 \setminus \Omega), \quad u_i \in C^2(E^3 \setminus \Omega)$$

$$\Delta u_i = 0, \quad (x, y, z) \in E^3 \setminus \Omega$$

$$u_i(x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma$$

$$|u_i(x, y, z)| \rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$$

$$\text{Тогда } u_1(x, y, z) = u_2(x, y, z).$$

Доказ: $u = u_1 - u_2,$

обладает всеми нужн. св-ми.

Хотим док., что $u(x, y, z) \equiv 0 \in E^3 \setminus \Omega$

От противного:

Пусть $\exists O M^+(x^0, y^0, z^0) \in E^3 \setminus \Omega$

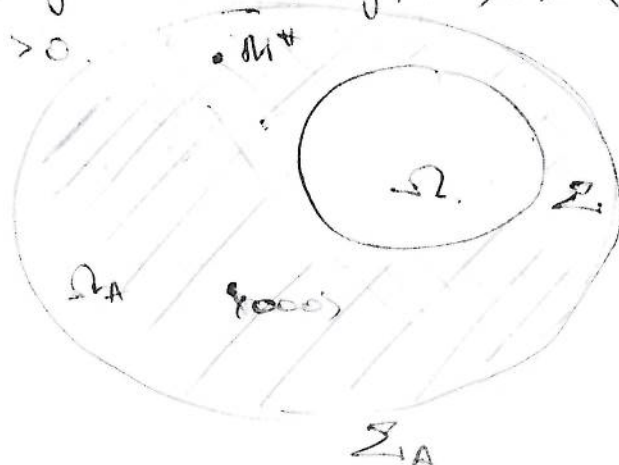
т.е. $u(x^0, y^0, z^0) = \delta > 0.$

Берём некоторую

сферу

$$\Sigma_A: x^2 + y^2 + z^2 = A^2$$

(см. рисунок).



Тетрадь общая
Формат 163x202 мм. Брошюра. 48 листов.
Для записей. Срок годности не ограничен.
Особых условий и правил хранения не требуется.
Арт. 7-43-120
© ООО «Альт», оформление
www.altplus.ru
Изготовитель: ООО «Альт»
121614, г. Москва, Островной проезд, д. 8
Отпечатано: ООО «Пересвет»
241019, г. Брянск, ул. Фрунзе, 64 А
Все права защищены! Сделано в России

ТУ 5463-012-99594039-2013

Изготовлено: 03.2016



12+



Область Ω_A ограничена участком Σ ,
снаружи - Σ_A .

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C(\bar{\Omega}_A), u \in C^2(\Omega_A) \\ \Delta u = 0, \text{ в } \Omega_A \end{array} \right.$$

Для u в Ω_A справедливы
принцип макс. значения:

$$\max_{\bar{\Omega}_A} u(x, y, z) = \max_{\Sigma \cup \Sigma_A} u(x, y, z)$$

$$\min_{\bar{\Omega}_A} u(x, y, z) = \min_{\Sigma \cup \Sigma_A} u(x, y, z).$$

$\max_{\Sigma} u = 0$, Σ_A - с.к. $u \geq 0$ при $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$
поэтому верно: $\max_{\Sigma_A} u(x, y, z) \leq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \max_{\bar{\Omega}_A} u(x, y, z) = \max_{\Sigma \cup \Sigma_A} u(x, y, z) \leq \frac{1}{2}$$

получили проверку u
(для u или аналогично)

Мисо

Пример

$$\sum x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

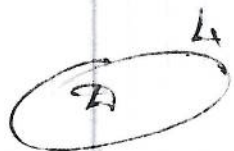
$$\Delta u = 0 \quad E^3 \setminus \bar{D}$$

$$u(x, y, z) = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

1) $u_1(x, y, z) = 1$ везде u_1 гармон.

2) $u_2 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ u_2 гармон. (р)

Внешняя ЗД на плоскости (E^2)



Опр Ф-ция $u(x, y)$ называется решением

Внеш ЗД, если:

$$u \in C(E^2 \setminus D), \quad u \in C^2(E^2 \setminus \bar{D})$$

$$\Delta u = 0 \quad (x, y) \in E^2 \setminus \bar{D}$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in L$$

$$|u(x, y)| \leq \text{const} \quad \forall (x, y) \in E^2 \setminus D.$$

u гармон. ф-ция, которая ограничена везде

Т (единственности)

Пусть ф-ция $u_i(x, y), i=1, 2$ т.е.

$$u_i \in C(E^2 \setminus D), \quad u_i \in C^2(E^2 \setminus \bar{D})$$

$$\Delta u_i = 0 \quad (x, y) \in E^2 \setminus \bar{D}.$$

$$u_i(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in L$$

$$|u_i(x, y)| \leq \text{const} \quad \forall (x, y) \in E^2 \setminus D.$$

Тогда

$$u_1(x, y, z) = u_2(x, y, z) \in E^2 \setminus D.$$

Л. В.

$$u(x, y) = u_1 - u_2.$$

Обладает всеми необход. свойствами.

$$|u(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in E^2 \setminus D.$$

(*) $M_0: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2$

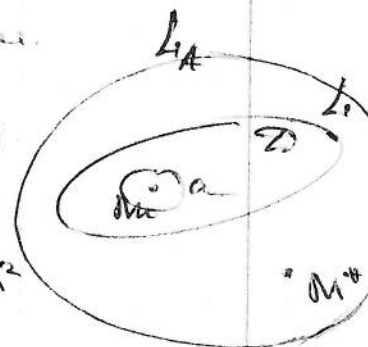
Она принимает: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = A^2$

Пусть $\exists M^+(x^+, y^+) \in E^2 \setminus \bar{D}$ т.е.

$$u(x^+, y^+) = C > 0.$$

Рассмотрим вспомогат. ф-цию:

$$w_A(x, y) = M_1 \frac{\ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}}{\ln \frac{A}{a}}$$



$\bar{D}_A$ - область, охватывающая L
через L_A .

$$u_A(x, y) \in C(\bar{D}_A) \quad u(x, y) \in C(\bar{D}_A)$$

$$u_A(x, y) \in C^2(D_A) \quad u(x, y) \in C^2(D_A)$$

$$\Delta u_A = 0 \text{ в } D_A \quad \Delta u = 0 \text{ в } D_A$$

($\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} = -\lim_{\rho \rightarrow 0} \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0}$ - на радиусе ρ),

на границе: $u(x, y) = 0 \quad (x, y) \in L$

$$u_A(x, y) > 0 \quad (x, y) \in L$$

$$u(x, y) \leq M = u_A(x, y) \quad (x, y) \in L_A$$

$$u(x, y) \leq u_A(x, y) \Rightarrow (x, y) \in L \cup L_A$$

Следовательно, $u(x, y) \leq u_A(x, y)$ в $\bar{D}_A$

(переходим к границе на бесконечности с помощью леммы (?)).

$$0 < \delta = u(x^*, y^*) \leq u_A(x, y) = M \frac{\ln \frac{1}{\sqrt{(x^*-x_0)^2 + (y^*-y_0)^2}}}{\ln \frac{A}{a}}$$

Вот, создавая
параметр, берем $\forall A: \exists A \rightarrow \infty$

$\swarrow A \rightarrow \infty$
 $0 = \lim_{A \rightarrow \infty} M$

Пример

$$D: x^2 + y^2 < 1$$

$$L: x^2 + y^2 = 1$$

$$\Delta u = 0 \text{ в } E^2 \setminus \bar{D}$$

$$u(x, y) = 1 \text{ на } L$$

$$u_1(x, y) = 1 \quad (+) \text{ сдвиг на } \infty$$

$$u_2(x, y) = 1 + \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (-) \text{ не сдвиг на } \infty$$

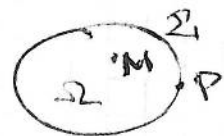
"хорошая" ф-я, радиус ρ , $\ln \rightarrow 0$

Вывод: Во внутренних точках имеют
удовлетворительные по теореме
Гурса свойства для E^2 и E^3 .

Лекция 3

от 30.10.17

10 Функция Грина для области D имеет вид:



интегральное представление
для гармонических

$$u(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_D [u(p) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) - \frac{1}{R_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n}] dS$$

↑
есть у 3-ей ф-лы для гармонических

Пусть Ω - шар в $\mathbb{R}^3$
 2-ая формула Грина:

$$\iiint_{\Omega} [u \Delta v - v \Delta u] dV = \iint_{\Sigma} [u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}] dS$$

$$0 = \iint_{\Sigma} [u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}] dS$$

$$u(M) = - \iint_{\Sigma} \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi R_{MP}} + v \right) - \left(\frac{1}{4\pi R_{MP}} + v \right) \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS$$

ЗН: $\Delta v = 0$ в Ω
 $v|_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi R_{MP}}$ ← константа на поверхности шара

$v(M, P) \leftarrow$ потенциал точки P в центре шара

конкретно значение v в точке $M(x, y, z)$ $\leftarrow$ $P(\xi, \eta, \zeta)$

определяется значение функции v на поверхности Σ и Ω

Опр. Функция $G(M, P)$ называется функцией Грина для шара Ω , если

1. $\forall M \in \Omega$. $G(M, P)$ как ф-ция от ξ, η, ζ

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} = 0$$

$\forall P \in \Omega, P \neq M$

2. Для $G(M, P)$ в Ω справедливы условия:

$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} + v, \text{ где } v \text{ шар в } \Omega$$

3. $G(M, P) = 0, P \in \Sigma$

(н. 1 и 2 вращают в нуль оператор Лапласа)

Вопросы: ① ?? ; ② ? $\frac{\partial G}{\partial n}$ на Σ

Если $G \in C^1, \frac{\partial G}{\partial n} \in C^0$

и y ~~шар~~ Шар Ω $\exists$ решение

$$\Delta u = 0$$

$$u|_{\Sigma} = \varphi$$

$$u(M) = - \iint_{\Sigma} \varphi(P) \frac{\partial G}{\partial n}(M, P) dS$$

Доказательство существования не будем,
предположим, что G существует.

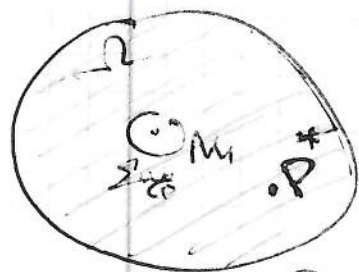
Свойства функции Грина.

Т₁

Функция Грина $G(M, P) > 0$
 $\forall M, P \in \Omega, M \neq P.$

Д-во:

Рассмотрим $G(M, P)$,
 M_1 - произв. точка в Ω .



Сфера Σ_ϵ с центром в M_1
радиуса ϵ ,
 $\Sigma_\epsilon \in \Omega$.

Область Ω_ϵ отсечена от Ω ,
внешней Σ_ϵ .

$G(M, P)$ гарм. в Ω_ϵ (везде как ф-я
гарм. P , т.е. M_1
функция $\rightarrow 1$ на
 $\partial_\epsilon, \gamma, \Gamma$).

$G(M, P) = 0$ на Σ_ϵ
 $G(M, P)$ на Σ_ϵ ?

$$G(M, P) = \underbrace{J(M, P)}_{\text{незав. от } M_1} + \underbrace{\frac{1}{4\pi R_{M_1 P}}}_{\substack{\text{не } \Sigma_\epsilon \\ + \infty}} \quad (\text{не эксп-т } \epsilon)$$

ограничена

$\Rightarrow \exists G^* > 0: G(M, P) > 0$ на Σ_ϵ
(принимая max)

$$\min_{\overline{\Omega_\epsilon}} G(M, P) = \min_{\Sigma_\epsilon \cup \Sigma_\epsilon} G(M, P) = 0$$

$$\min_{\overline{\Omega_\epsilon}} G(M, P) = 0 \Rightarrow G(M, P) \geq 0 \text{ в } \overline{\Omega_\epsilon}$$

$$\Rightarrow G(M, P) \geq 0 \text{ везде в } \Omega$$

$$] G(M, P^*) = 0 \quad (\text{если где-то функция } G \text{ была } = 0, \text{ то гарм. ф-я } = \text{const} = 0, \text{ но это не может, т.к. не, функция не может быть } > 0)$$

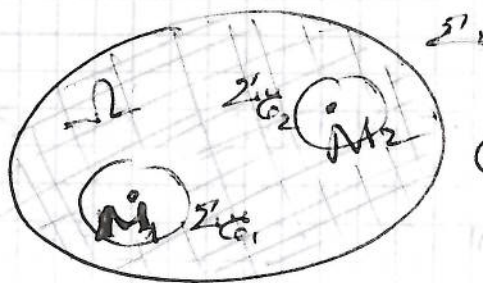
$$\Rightarrow G(M, P) > 0, \quad \forall P \in \Omega$$

Мин

(T) (об. в сущности)

$$G(M, P) = G(P, M) \quad \forall M, P \quad M \neq P$$

2. Всп.



$$G(M_1, M_2) \stackrel{?}{=} G(M_2, M_1)$$

Пусть $(\cdot) M_1$ и $M_2 \rightarrow \Omega$ сфер Σ_{ϵ_1} и Σ_{ϵ_2} ,
область Ω_{ϵ}
(см. в. в. (T)).

$$G(M_1, P), G(M_2, P) \quad P \in \Omega_{\epsilon}$$

"Вокруг точек сходимости, найдем 2
хорошие функции"

2-я ф. из группы в Ω_{ϵ} .

$$\iiint_{\Omega_{\epsilon}} [G(M_1, P) \Delta G(M_2, P) - G(M_2, P) \Delta G(M_1, P)] dV$$

Ω_{ϵ}

$$= \iint_{\Sigma_{\epsilon}} [G(M_1, P) \frac{\partial G}{\partial n}(M_2, P) - G(M_2, P) \frac{\partial G}{\partial n}(M_1, P)] dS \quad (+)$$

$$+ \iint_{\Sigma_1^{\epsilon}} [G(M_1, P) \frac{\partial G}{\partial n}(M_2, P) - G(M_2, P) \frac{\partial G}{\partial n}(M_1, P)] dS$$

$$+ \iint_{\Sigma_2^{\epsilon}} [G(M_1, P) \frac{\partial G}{\partial n}(M_2, P) - G(M_2, P) \frac{\partial G}{\partial n}(M_1, P)] dS$$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma_1^{\epsilon}} + \iint_{\Sigma_2^{\epsilon}} = 0 \quad \text{Условие } \epsilon \rightarrow 0$$

$$\iint_{\Sigma_1^{\epsilon}} G(M_1, P) \frac{\partial G}{\partial n}(M_2, P) dS$$

неоп. $\Rightarrow$ оп.



Поскольку в. в. и
сфера - поверхность ϵ^2

$$G(M_1, P) \sim \frac{1}{4\pi R_{M_1 P}} = \frac{1}{4\pi \epsilon^2}$$

наблюдения
оценки (при
выборе точек $\epsilon \rightarrow 0$)

$$\iint_{\Sigma_1^{\epsilon}} [] dS \sim \epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

$$- \iint_{\Sigma_2^{\epsilon}} G(M_2, P) \left[\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{4\pi R_{M_2 P}} + \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{4\pi R_{M_1 P}} \right] dS$$



$$M_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$P(x, y, z)$$

$$\vec{n} = \left\{ -\frac{z - z_1}{R_{M,P}}, -\frac{y - y_1}{R_{M,P}}, -\frac{x - x_1}{R_{M,P}} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_{M,P}} \right) = \frac{(z - z_1)}{R_{M,P}^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M,P}} \right) &= \frac{(z - z_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_1)^2}{R_{M,P}^4} = \\ &= \frac{1}{R_{M,P}^2} = \frac{1}{\xi^2} \end{aligned}$$

$$-\iint_{\Sigma_1} G(M_2, P) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{4\pi R_{M,P}} d\sigma = P^*$$

$$= -\frac{1}{4\pi \xi^2} \iint_{\Sigma_1} G(M_2, P) d\sigma = -\frac{1}{4\pi \xi^2} G(M_2, P^*)$$

$P^* \in \Sigma_1$

Тогда мы имеем - со свойством Σ_2

$$-G(M_2, M_1) + G(M_1, M_2) = 0. \quad \underline{4.10}$$

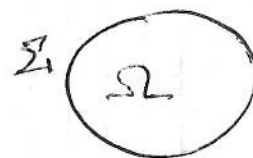
$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp \left\{ -\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t} \right\} \varphi(\xi) d\xi$$

$G(x, \xi, t)$

11

Потенциалы

E^3

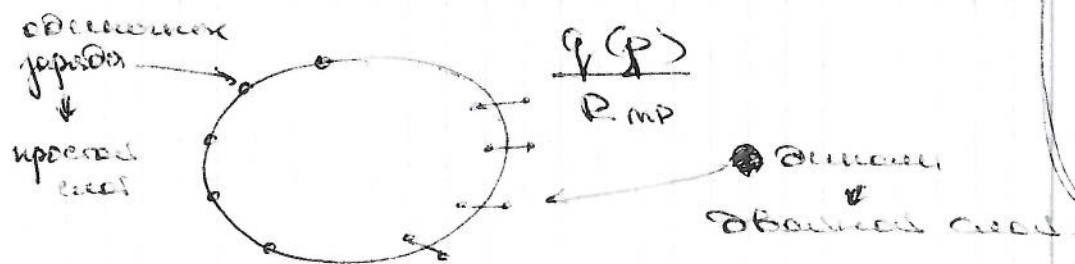


$$J(M) = \iint_{\Sigma_1} g(P) \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P$$

нормальный вектор

$$u(M) = - \iint_{\Sigma_1} f(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P$$

нормальный вектор



$\Phi_{\text{пот}} g(P), f(P)$ - потенциалы

$$E^2: J(M) = \int_{\Sigma_1} g(P) \ln \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P$$

$$u(M) = - \int_{\Sigma_1} f(P) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P$$

Аппетит не прожорлив !!!

Все остальное и концы задачи уже даны.
 Проверим то:

$$E^2: \quad \int M \neq L$$

$$\Delta_M U(M) = \int_L g(P) \left(\Delta_M \ln \frac{1}{r_{MP}} \right) dP$$

$$\Delta_M U(M) = - \int_L f(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\Delta_M \ln \frac{1}{r_{MP}} \right) dP$$

Лекция 10
 от 13.11.14

Получим из 2-го акса на непосредств.

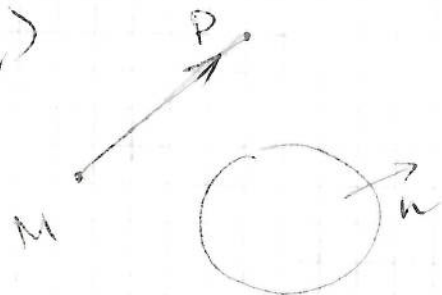
E^2

$$U(M) = - \int_L f(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} \right) dP =$$

$$= \int_L f(P) \frac{\partial}{\partial n} (\ln r_{MP}) dP$$

$M(x, y)$

$P(\xi, \eta)$



$$\frac{\partial}{\partial n} \ln r_{MP} = \left(\text{grad } \ln r_{MP}, \vec{n} \right)$$

$$r_{MP} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \ln r_{MP} = \frac{(\xi - x)}{r_{MP}^2} \quad \left(= \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{2r} \cdot 2(\xi - x) \right)$$

$$\text{grad } \ln r_{MP} = \left\{ \frac{(\xi - x)}{r_{MP}^2}, \frac{(\eta - y)}{r_{MP}^2} \right\} = \frac{\vec{MP}}{r_{MP}^2}$$

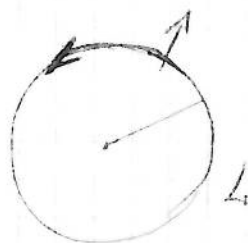
$$(\text{ab}) = |\text{a}| |\text{b}| \cos \angle \quad \|\vec{MP}\| = r_{MP}, \quad \|\vec{n}\| = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln r_{MP} = \frac{r_{MP} \cdot \|\vec{n}\| \cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}^2} = \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}}$$

используем известное представление

$$U(M) = \int_L f(P) \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}} dP$$

концы L:

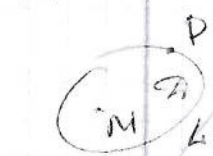


- 1) число вычетов
- 2) двукратный пер. диф.
- 3) угол $L = 11$ градусов по часовой стрелке (в н.к.).

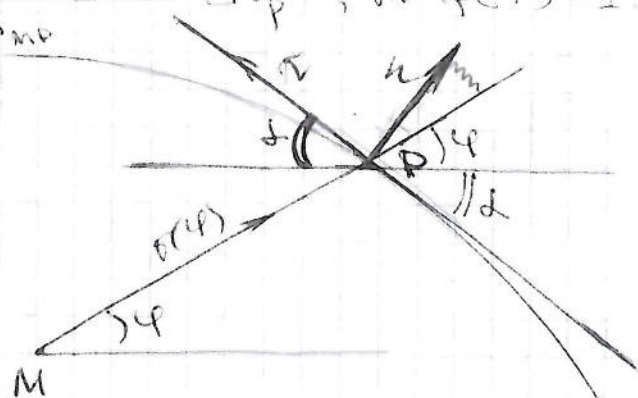
Потенциал 2^{го} рода с единичной плотностью

$$U_e(M) = \int_L \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}} d\ell_P, \text{ где } f(P) = 1$$

$M \in D$



просто переходим к DCR



$$\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n}) d\ell_P = \sigma(\varphi) d\varphi$$

$$\begin{aligned} \cos \angle(\vec{MP}, \vec{n}) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - d - \varphi\right) = \sin(d + \varphi) = \\ &= \sin d \cos \varphi + \cos d \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n}) d\ell_P = \sin d \cos \varphi d\ell_P + \cos d \sin \varphi d\ell_P =$$

$$= \cos \varphi dy - \sin \varphi d\xi =$$

$$\begin{cases} dy = d\ell_P \sin d \\ d\xi = -d\ell_P \cos d \end{cases}$$

непрямая
явления

$$\begin{cases} \xi = \sigma(\varphi) \cos \varphi \\ \eta = \sigma(\varphi) \sin \varphi \end{cases}$$

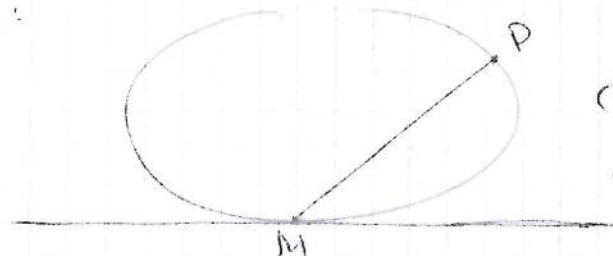
$$\begin{aligned} &= \cos \varphi (\sigma'(\varphi) \sin \varphi + \sigma(\varphi) \cos \varphi) d\varphi + \\ &+ (-1) \cdot \sin \varphi (\sigma'(\varphi) \cos \varphi - \sigma(\varphi) \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \sigma(\varphi) [\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)] d\varphi = \sigma(\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

$$U_e(M) = \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(\varphi) d\varphi}{\sigma(\varphi)} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \quad \left(\begin{array}{l} \text{где } V \\ \text{содержит} \\ \text{выпуклый } D \end{array} \right)$$

$$U_e(M) = \begin{cases} 2\pi, & M \in D \\ \pi, & M \in L \\ 0, & M \in \mathbb{R}^2 \setminus D \end{cases}$$

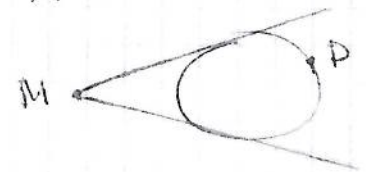
аналогия
свойств
предела
интеграла

$M \in L$:



При таком
расположении
M на границе
этого круга
и от 0 до pi, считая
сверху по часовой

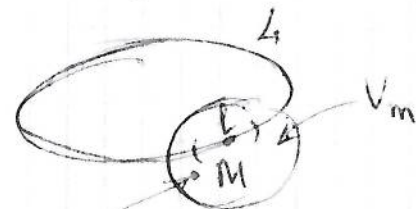
$M \in \mathbb{R}^2 \setminus D$:



Нужно
написать
правильно.

~~Матрица~~ (Матрица)

$F(M, P)$ неогр $\forall M, P, (M \neq P)$



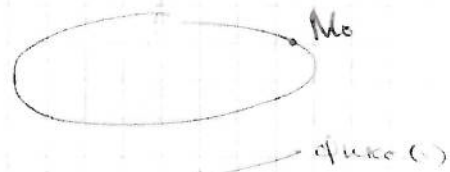
$$\int_L F(M, P) d\ell_P (*)$$

Она непрерывна (*) может быть
смысл $\forall \epsilon > 0 \exists \text{ окр } V_M \text{ и } \delta \in L, M \in \delta : \forall K \in V_M$
 $\left| \int_K F(M, P) d\ell_P \right| < \epsilon$

1)

Если интервал (a) ex-est равен ∞ и $M \in L$,
то он непрерывен в M .

1)

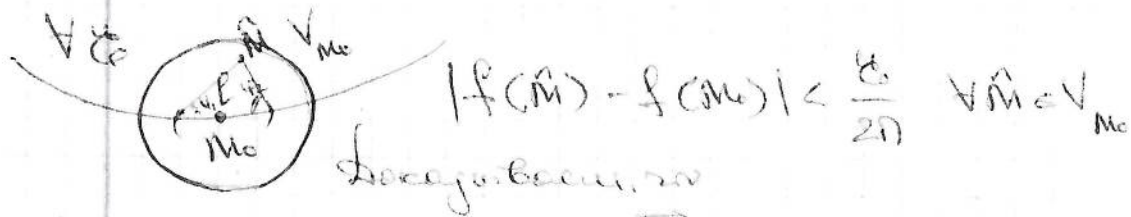


Пусть $f(P)$ непрерывна в $M_0 \in L$.

Тогда f -интеграл
$$N(M) = \int_L f(P) \frac{\cos L(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}} dP -$$

$$- f(M_0) \int_L \frac{\cos L(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}} dP$$
 непрерывна в M_0 .

Д.б.о:
$$N(M) = \int_L [f(P) - f(M_0)] \frac{\cos L(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}} dP$$



$$\left| \int_L [f(\vec{r}) - f(M_0)] \frac{\cos L(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}} dP \right| < \epsilon$$

Далее мы будем называть непрерывность f в M_0 как $M \rightarrow M_0$.

$$\int_{V_1}^{V_2} [f(\vec{r}) - f(\vec{r}(\varphi))] \frac{\cos L(\vec{r}, \vec{n})}{r(\varphi)} d\varphi \leq \left| \int_{V_1}^{V_2} |f(\vec{r}) - f(\vec{r}(\varphi))| d\varphi \right| < \epsilon$$

Уч.д.

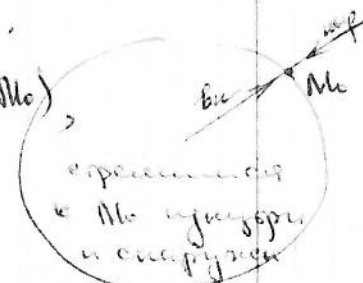
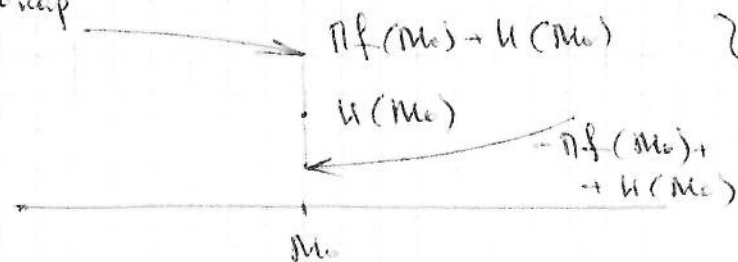
1)

(о сходимости)

Пусть $f(P)$ непрерывна в $M_0 \in L$.

Тогда
$$\lim_{M \rightarrow M_0 \text{ в } L} u(M) = \pi f(M_0) + u(M_0)$$

$$\lim_{M \rightarrow M_0 \text{ на } P} u(M) = -\pi f(M_0) + u(M_0)$$



Итак, $\pi f(M_0) + u(M_0)$

Д.б.о:

$$\lim_{M \rightarrow M_0 \text{ в } L} u(M) = \lim_{M \rightarrow M_0 \text{ в } L} [N(M) - f(M_0) u_c(M)] =$$

$$= N(M_0) + 2\pi f(M_0) = u(M_0) - f(M_0) u_c(M_0) + 2\pi f(M_0)$$

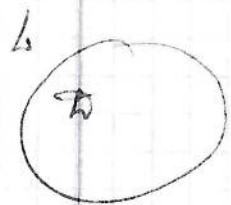
$$= u(M_0) + \pi f(M_0)$$

$$\lim_{M \rightarrow M_0 \text{ на } P} u(M) = \lim_{M \rightarrow M_0 \text{ на } P} [] = f(M_0) - 0 = u(M_0) - f(M_0) u_c(M_0)$$

$$= -\pi f(M_0) + u(M_0)$$

Уч.д.

12) Редуцируя ΔD к интегральному ур-ю Фредholm 2 рода.



В $\bar{D}$

Найти $u(x, y)$ из

$$\begin{cases} u \in C^2(D), u \in C(\bar{D}) \\ \Delta u = 0, (x, y) \in D \\ u(x, y) = \theta(x, y), (x, y) \in L \end{cases}$$

Ищем реш. функцию в виде

$$u(M) = \begin{cases} \int_L f(p) \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{mp}} d\vec{p}, M \in D \\ \Pi f(M) + \int_L f(p) \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{mp}} d\vec{p}, M \in L \end{cases}$$

на границе
обозначим
но неп-н
(ан. ур-е (1))



$$u(M) \in C^2(D)$$

$$\Delta u = 0$$

$$u \in C(\bar{D})$$

Найти $f(p), p \in L$:

$$\Pi f(M) + \int_L f(p) \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{mp}} d\vec{p} = \theta(M) \quad \forall M \in L \quad (1)$$

$$f(x) + \int_a^b K(x, s) f(s) ds = \theta(x)$$

Или ур-е Фредholm II рода

но не канон, нужно пром. преобр. в НК.

(T) (Фредholm)

Ур-е (1) имеет неп. реш. для $\forall$ неп. $\theta(M)$
или одноп. ур-е (1) имеет только нул. реш:
 $\theta(M) \equiv 0$.

(T') (1 реш. в $\bar{D}$)

Если $\theta(M)$ неп. на L , то

1 реш. ~~не~~ ~~в~~ $\bar{D}$.

Або:

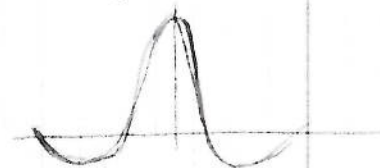
докажем, что одноп.-ур-е

$$\Pi f(M) + \int_L f(p) \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{mp}} d\vec{p} = 0 \quad M \in L$$

не имеет неп. решения.

$$\exists f(M) \neq 0;$$

$$\exists M_0 : f(M_0) = \max_{M \in L} |f(M)| > 0$$



$$\pi f(M_0) + \int_L f(P) \frac{\cos \angle(\vec{M_0P}, \vec{n})}{r_{M_0P}} d\Omega_P = 0$$

$$\pi f(M_0) = \int_L f(P) \frac{\cos \angle(\vec{M_0P}, \vec{n})}{r_{M_0P}} d\Omega_P = 0$$

$$\int_L [f(P) + f(M_0)] \frac{\cos \angle(\vec{M_0P}, \vec{n})}{r_{M_0P}} d\Omega_P = 0$$

$\frac{d\Omega_P}{d\Omega_P}$

$$(P = M_0)$$

$$f(P) + f(M_0) = 0 \quad \forall P \in L$$

$$f(M_0) = 0$$

Итог.

Лекция 11
от 20.11.17

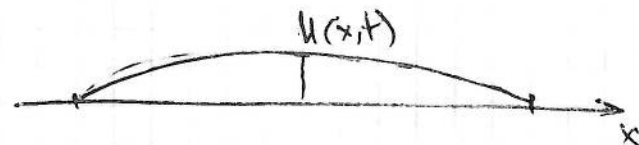
Часть III.

Уравнения линейного типа.

1

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

- ур. колебаний
(волновое ур.е)



$u(x,t)$ - амплитуда отклонения
в м. x в мом. времени t.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$\varphi(x)$ - нач. смещ.
струны

$$u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$\psi(x)$ - скорость
(начальная
колебания
струны).

Крайовые условия:

$$1. \quad u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$2. \quad u_x(0,t) = \omega(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$3. \quad u(0,t) + \lambda u_x(0,t) = \theta(t).$$

1^{ая} КЗ:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & 0 < t \leq T \\ u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

Задача на Гурсе

1^{ая} КЗ:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, & 0 < t < T \\ u_x(0, t) = \alpha(t), & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & x > 0 \end{cases}$$

Аналогично задачи
2^{ая} и 3^{ая} КЗ.

3^я КЗ:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

2 ЗК Поручил Анализ

$$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & 0 \leq t \leq T \\ (2) & \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \\ (3) & \begin{cases} u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть $u(x, t)$ — реш. (1); $\xi = x + at$, $\eta = x - at$.

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\xi - \eta}{2a}$$

$$v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right)$$

$$\Delta_{\xi, \eta} v(\xi, \eta) = u_{xx}\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right) \cdot \frac{1}{2} + u_t\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right) \cdot \frac{1}{2a}$$

$$\Delta_{\xi, \eta} v = u_{xx}(\cdot) \left(\frac{1}{2}\right)^2 + u_{xt}(\cdot) \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2a}\right) +$$

$$\left(u_{tx} = u_{xt}\right) + u_{tx}(\cdot) \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2} + u_{tt}(\cdot) \frac{1}{2a} \left(-\frac{1}{2a}\right)$$

$$= \frac{1}{4} u_{xx}(\cdot) - \frac{1}{4a^2} u_{tt}(\cdot) = 0.$$

u_{xx} = u_{tt}

$$f_{\xi}(\xi, \eta) = \hat{f}_1(\xi)$$

Аналогично по ξ :

Литература по э:

$$J(\xi, \eta) = \int f_1(\xi) d\xi + f_2(\eta)$$

f. u f2
урагв.
f. u u

$$\mathcal{L}(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

реш
-пр-я

Как
отражено
и в 2?

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

Amara
p. 9
p. 10
p. 11

$$U(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

$$u_1(x, 0) = a f_1'(x) - a f_2'(x) = \psi(x)$$

Consider
 f_1, u, f_2
 $\hookrightarrow$
 always true

$$f_1(x) + f_2(x) = 4(x) \quad x$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + \text{Const}$$

$$f_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \varphi\left(\frac{x}{2}\right) dx + \frac{C}{2}$$

$$f_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \varphi(\xi) d\xi - \frac{C}{2}.$$

$$u(x,t) = \frac{\psi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{g}{2} (t)$$

$$\textcircled{c} \frac{\psi(x-a)}{2} = \frac{1}{2\sigma} \int_{x-a}^{x_0} \psi(\xi) d\xi - \frac{0}{2} =$$

$$\psi = \frac{\psi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{\psi(x-at)}{2}$$

P. no. Lianidze:

$$(4) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [\psi(x+at) + \psi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi$$

⑦ C 7u! per 3k

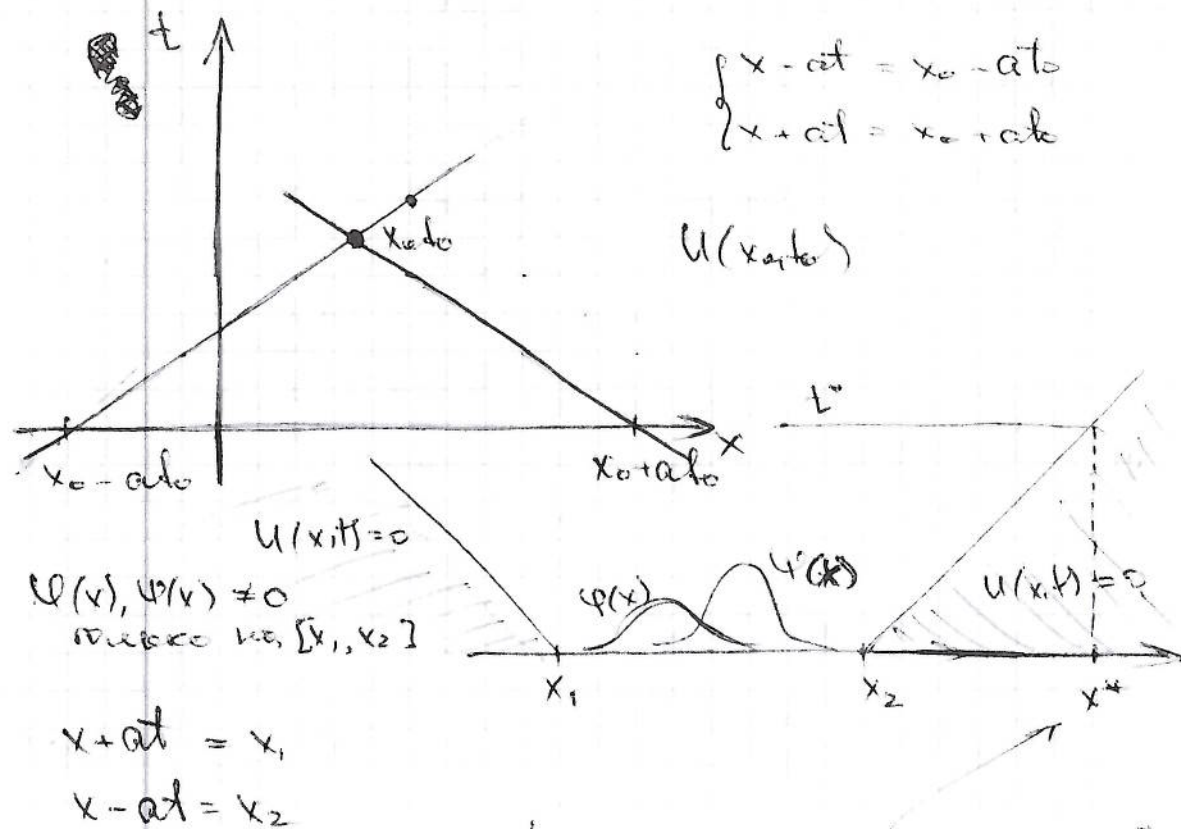
Angen $\psi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$.

Тоже $\exists!$ $u(x, t) \in C^2 \{ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \}$,
удовлетв. (1), (2) и (3).

2-60 Рассм. $u(x, t)$, опре-е ф-ии $\lambda(4)$.

$$u \in C^2 \setminus \{R \times \bar{D}^+\} \rightarrow \Phi_{\text{reg}} \text{ for } \text{Borel}$$

2. Корректировка и проблем. Вывод. Вывод на контракт



Нерезультат. Нормы через границы.
 (т.е. $u(x^*, t) \neq 0$ и т.д. и т.д. и т.д.).

(5) (генерализация по z)

Пусть $u_i(x, t)$ $i=1, 2$ и т.д.

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t \leq T$$

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) = \psi_i(x)$$

$$\varphi_i \in C^2(\mathbb{R}), \quad \psi_i \in C^1(\mathbb{R})$$

$$|\varphi_i(x)| \leq C_1, \quad |\psi_i(x)| \leq C_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Тогда

$$\sup_{(x,t) \in \Pi} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| +$$

$$+ T \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_1(x) - \psi_2(x)|$$

$$\Pi = \{(x,t), x \in \mathbb{R}, 0 < t \leq T\} - \text{нормы}$$

Д.Р.

Пусть u_1, u_2 удовлетворяют $\Delta u = 0$.

$$\sup_{\Pi} |u_1 - u_2| \leq \sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2} (\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at) + \varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)) \right| +$$

$$+ \sup_{\mathbb{R}} \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)| d\xi \leq$$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| + T \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_1(x) - \psi_2(x)|$$

1.10

3

Метод продолжения решения
задан на Π на Π^* .

1.10 КЗ:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), x > 0 \\ u_t(x, 0) = \psi(x), x > 0 \end{cases}$$

$$u(0, 0) = 0$$

$$\varphi(0) = 0$$

$$u_t(0, 0) = \psi(0)$$

Ищем решение уравнения уравнения:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$U(x, 0) = \Phi(x) \quad -\infty < x < \infty$$

$$U_t(x, 0) = \Psi(x)$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(x), & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(x), & x \leq 0 \end{cases}$$

Проверим, что Φ и Ψ удовлетворяют условиям:

$$U(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & x-at \geq 0 \\ \frac{1}{2} [\varphi(x+at) - \varphi(at-x)] + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi - \frac{1}{2a} \int_0^{at-x} \psi(\xi) d\xi, & x-at < 0. \end{cases}$$

Запишем в терминах φ и ψ !!!

2-й КЗ

$$\begin{cases} U_{tt} = a^2 U_{xx} & x > 0, t > 0 \\ U_x(0, t) = 0 & t > 0 \\ U(x, 0) = \Phi(x) & x > 0 \\ U_t(x, 0) = \Psi(x) & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{tt} = a^2 U_{xx} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ U(x, 0) = \Phi(x), & -\infty < x < \infty \\ U_t(x, 0) = \Psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ \varphi(-x), & x \leq 0 \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ \psi(-x), & x \leq 0 \end{cases}$$

$$U(x, t) = U(x, t), \quad x \geq 0, t > 0$$

$$U_x(at) = U_x(at) = \frac{\Phi'(at) + \Phi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \psi(at) - \frac{1}{2a} \psi(at) = 0$$

(по условию ψ — чётная)

Пусть $(x-at) \leq 0$:

$$\Phi(x-at) = \varphi(-x+at)$$

$$\int_{x-at}^{x+at} \varphi d\xi = \int_{x-at}^0 \varphi d\xi + \int_0^{x+at} \varphi d\xi; \quad \int_{x-at}^0 = \int_{x-at}^0 -\varphi(-\xi) d\xi$$

$$x-at \leq 0.$$

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & x-at \geq 0 \\ \frac{\varphi(x+at) + \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^{at-x} \psi(\xi) d\xi, & x-at \leq 0. \end{cases}$$

Лекция 12
от 27.11.19

1. Решение 1КЗ для уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

Данная задача
решается
методом
разделения
переменных.

2.

$\varphi \in C^3[0,l], \psi \in C^2[0,l]$

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0, \psi(0) = \psi(l) = 0$$

Тогда $\exists u \in C^2\{[0,l] \times [0,T]\}$ с.з.

$u(x,t)$ реш. (4).

Д.б.о.: Метод разделения переменных $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Пусть $x-at \leq 0$. Тогда $\varphi(x+at) - \varphi(x-at) = \varphi(x) + \varphi(at-x)$

$$\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi = \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \int_{x-at}^0 \psi(\xi) d\xi$$

Подставим в (4): $T'(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda$$

Решим 2 задачи

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 \leq x \leq l \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$$

ищем не тривиальное решение.

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

Задача 1

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, \infty$$

$$T_n(t) = \tilde{C}_1 \sin \frac{\pi n a}{l} t + \tilde{C}_2 \cos \frac{\pi n a}{l} t$$

$$X_n(x) = \tilde{C}_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$$

$\forall n$ реш. (4) [т.е. X_n и T_n реш. (4)]

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin \frac{\pi n a}{l} t + b_n \cos \frac{\pi n a}{l} t) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$\forall$ нам надо подобрать a_n и b_n - по 1КЗ и гранич. условиям.

Найдем a_n и b_n .

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x) \quad \text{явно или кос. член}$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\pi n}{l} a \sin \frac{\pi n}{l} x = \psi(x) \quad \text{или не}$$

$$\int_0^l \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} x dx = \begin{cases} \frac{l}{2}, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_0^l u(x,0) \sin \frac{\pi m}{l} x dx = \int_0^l u_t(x,0) \sin \frac{\pi m}{l} x dx \quad (4m)$$

$$B_m \frac{l}{2} = \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi m}{l} s ds \rightarrow B_m = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi m}{l} s ds$$

$$A_m \frac{\pi m}{l} a \frac{l}{2} = \int_0^l \psi(s) \sin \frac{\pi m}{l} s ds \rightarrow A_m = \frac{2}{\pi m a} \int_0^l \psi(s) \sin \frac{\pi m}{l} s ds$$

явно или кос. член $u(x,t)$
 б-ли, то то явно или кос. член $u''(x,t)$
 $u(x,t)$ эк-ва, $u''(x,t)$ эк-ва.

$$\text{обобщение, т.е. } u_m(x,t) = \frac{\rho \cdot \gamma_{\text{пл}}}{c} \cdot \frac{\sin \frac{\pi n}{l} x}{\omega} \rightarrow \text{эк}$$

$$f(x) : f_n = \int_0^l f$$

$$A_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds = \text{явно или кос. член}$$

$$= \frac{2}{\pi n a} \varphi(s) \left(-\frac{l}{\pi n} \right) \cos \frac{\pi n}{l} s \Big|_0^l + \frac{2l}{\pi n^2 a} \int_0^l \varphi'(s) \cos \frac{\pi n}{l} s ds =$$

$$= \frac{2l}{\pi n^2 a} \varphi'(s) \frac{l}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{l} s \Big|_0^l - \frac{2l^2}{\pi n^3} \int_0^l \varphi''(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds$$

$$A_n = - \frac{2l^2}{\pi n^3} \int_0^l \varphi''(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds$$

явно или кос. член

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds = \frac{2}{l} \varphi(s) \left(-\frac{l}{\pi n} \right) \cos \frac{\pi n}{l} s \Big|_0^l +$$

$$+ \frac{2}{\pi n} \int_0^l \varphi'(s) \cos \frac{\pi n}{l} s ds = \frac{2}{\pi n} \varphi'(s) \frac{l}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{l} s \Big|_0^l -$$

$$- \frac{2l}{\pi n^2} \int_0^l \varphi''(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds = - \frac{2l}{\pi n^2} \varphi''(s) \left(-\frac{l}{\pi n} \right) \cos \frac{\pi n}{l} s \Big|_0^l -$$

$$- \frac{2l^2}{\pi n^3} \int_0^l \varphi'''(s) \cos \frac{\pi n}{l} s ds$$

$$B_n = - \frac{2l^2}{\pi n^3} \int_0^l \varphi'''(s) \cos \frac{\pi n}{l} s ds$$

Докажем, что $cx - cx$ п.д

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|, \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n|$$

$$|a_n| = c \frac{1}{n^2} |\hat{\Psi}_n|, \hat{\Psi}_n = \int_0^l \Psi''(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds$$

use $AB \leq \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} B^2$ $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\Psi}_n^2$ $cx - cx$. $\left(\begin{array}{l} \text{Безмысл.} \\ \text{р. Ф.} \end{array} \right)$

$$n^2 |a_n| = \frac{c}{n} |\hat{\Psi}_n| \leq \frac{c}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |\hat{\Psi}_n|^2 \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n| \leq \frac{c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{\Psi}_n|^2 \rightarrow cx$$

Аналогично

$$n^2 |b_n| = \frac{2l^2}{\pi^3 n} |\hat{\Psi}_n|, |\hat{\Psi}_n| = \int_0^l \Psi''(s) \cos \frac{\pi n}{l} s ds$$

$$\leq \frac{2l^2}{\pi^3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} |\hat{\Psi}_n|^2 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\Psi}_n^2 \quad cx - cx$$

$$u(x,t) = \sum \ln(x,t)$$

$$|\ln(x,t)| \leq |a_n| + |b_n|$$

По теореме В.е.с. $u(x,t) \in C\{[a,b] \times [0,T]\}$.

Докажем $\exists$ 2^{nd} производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin \frac{\pi n}{l} at + b_n \cos \frac{\pi n}{l} at \right) \left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u^2 \right) \right)$$

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \leq \underbrace{(|a_n| + |b_n|)}_{cx - cx} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 n^2$$

$cx - cx$

матрица нормальных дифференциалов

$$\text{find } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{аналогично. } \underline{\underline{Минд.}}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x = f(x).$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \Psi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds \sin \frac{\pi n}{l} x$$

15. Условие непрерывности. В п. 13 дано условие непрерывности.

$$u_t = a^2 \ln x + f(x,t)$$

$$u(at) = p_1(t)$$

$$u(bt) = p_2(t)$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = \Psi(x)$$

⑦

$\{ u_i(x, t) \quad i=1, 2 \quad \text{с.т.}$

$$u_i \in C^2 \{ [a, b] \times [0, T] \}$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u_i(a, t) = p_1(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u_i(b, t) = p_2(t)$$

$$u_i(x, 0) = \varphi(x)$$

$$\text{Тожд. } u_1 = u_2 + \text{const}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$$

З. 80:

$$f = u_1 - u_2$$

$$u_H = a^2 u_{xx}$$

$$u(a, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u(b, t) = 0$$

$$u(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq l$$

$$u_t(x, 0) = 0$$

Рассужд. при канон. след. т. ф-ции

$$I(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [a^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right)^2] dx$$

- интеграл энергии [полная энергия системы]

$$I'(t) = \int_0^l [a^2 f_x(x, t) f_{xt}(x, t) + f_t(x, t) f_{tt}(x, t)] dx =$$

$$= a^2 f_x(x, t) f_t(x, t) \Big|_0^l + \int_0^l [-a^2 f_{xx}(x, t) f_t(x, t) + f_t(x, t) f_{tt}(x, t)] dx$$

$$I'(t) = a^2 f_x(x, t) f_t(x, t) \Big|_0^l + \int_0^l f_t(x, t) [-a^2 f_{xx} + f_{tt}] dx$$

$$I'(t) = a^2 f_x(l, t) f_t(l, t) - a^2 f_x(a, t) f_t(a, t) + 0 = 0$$

$$I'(t) = 0 \rightarrow I(t) = \text{const} \rightarrow I(t) = I(0)$$

$$I(t) = I(0) = \frac{1}{2} \int_0^l [a^2 (f_x(x, 0))^2 + (f_t(x, 0))^2] dx = 0$$

$$f_x(x, t) = f_t(x, t) = 0 \rightarrow f(x, t) = \text{const.} \quad \underline{u_{\text{ст.}}}$$

Задача с данными на краях

>> характеристики - это что? <<

$$a_{11}(x, y) u_{xx}(x, y) + 2a_{12}(x, y) u_{xy} + a_{22}(x, y) u_{yy}(x, y) + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \quad (1)$$

Дип Характеристиками урав. (1) являются
первые интегралы

$$0 \leq y \quad a_{11}(x,y)(dy)^2 - 2a_{12}(x,y)dx dy + a_{22}(x,y)(dx)^2 = 0$$

Для уравн: $u_{xx} = a^2 u_{yy}$

$$a^2 u_{xx} - u_{yy} = 0$$

$$a^2 (dy)^2 - (dx)^2 = 0 \quad \leftarrow \text{уравнение}$$

$$\begin{cases} a dy - dx = 0 \\ a dy + dx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - at = C_1 \\ x + at = C_2 \end{cases} \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{хар-ки} \\ \text{уравн} \end{matrix}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [\psi(x+at) + \psi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi$$

Задача - задача Дирихле
 $u(x,y)$

$$(1) \quad u_{xy}(x,y) = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y - f(x,y,u(x,y))$$

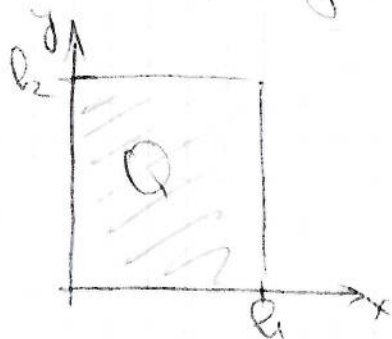
$$(2) \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l_1$$

$$(3) \quad u(0,y) = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq l_2$$

$$dx dy = 0 \quad x = \text{const}$$

$$y = \text{const}$$

$$Q = \{(x,y) : 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$$



Лекция 13
от 4.12.17

Меню I:

$I, a, b \in C[\Omega]$ в Ω , и Ω замкнут

$$f(x,y,p) \in C[\Omega \times \mathbb{R}]$$

f непрерывна в $(x,y) \in \Omega, \forall p \in \mathbb{R}$

$$|f(x,y,p_1) - f(x,y,p_2)| \leq L|p_1 - p_2| \quad \forall (x,y) \in \Omega, \forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}$$

(условие Липшица по p)

$$\varphi \in C^1[0, l_1], \quad \psi \in C^1[0, l_2]$$

$$\varphi(0) = \psi(0)$$

Дип Функция $u(x,y)$ называется
решением задачи Дирихле (1)-(3),
если $u, u_x, u_y, u_{xy} \in C[\Omega]$ и
удовлетворяет (1)-(3).

Покажем эквивалентность (1)-(3) и
интегрируем (1) по Ω

$$u_x(x,y) - u_x(x,0) = \int_0^y [a(x,\eta)u_x(x,\eta) + b(x,\eta)u_y(x,\eta) - f(x,\eta,u(x,\eta))] d\eta$$

$$u_x(x, 0) = \varphi'(x)$$

$$u_x(x, y) = \varphi'(x) + \int_0^y \dots d\eta$$

Теперь интегрируем по x

$$u(x, y) - u(0, y) = \int_0^x \varphi'(\xi) d\xi + \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta) u_x(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) u_y(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u(\xi, \eta))] d\eta d\xi$$

$$u(x, y) = \varphi(y) + \varphi(x) - \varphi(0) + \iint_{\Omega} \dots d\eta d\xi$$

$$(4) \quad u(x, y) = \varphi(x, y) + \iint_{\Omega} a(\xi, \eta)$$

$$(5) \quad u(x, y) = \varphi_x(x, y) + \int_0^y$$

$$(6) \quad u(x, y) = \varphi_y(x, y) + \int_0^x [a(\xi, y) u(\xi, y) + b(\xi, y) u_x(\xi, y) + f(\xi, y, u(\xi, y))] d\xi$$

Теперь рассмотрим, что happens с этими формулами $\rightarrow$ Пусть $u, v \in C[\Omega]$ и удовлетворяют (4)-(6).

Если 2 раза дифференцируем:

$$\varphi(x, 0) = \varphi(x) \leftarrow \varphi(x, 0) = \varphi(x) + \varphi(0) - \varphi(0) \rightarrow \text{I по фактору (1)-(3)}$$

$$\varphi(0, y) = \varphi(y) \leftarrow \text{Аналогично.}$$

$$\begin{cases} \varphi = u_x \\ \psi = u_y \end{cases}$$

$\rightarrow$ I по условиям (1)-(6).
неприменимо!

II (cylindrical coordinates)

Нужно построить, доказать I.

Тогда $\exists u(x,y) - \text{para (1) - (3)}$

Л-60: Дока. о.а. что $u, \varphi, \psi \in C[\Omega] -$
- para (1) - (3).

Поскольку near o f-ness $u_0(x,y) = 0$

$$\begin{aligned} \varphi_0(x,y) &= 0 \\ \psi_0(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

$$u, \varphi, \psi \in C[\Omega]$$

use
f-ness
monotonicity

$$|f(\xi, \eta, u) - f(\xi, \eta, u_0)| \leq M |u - u_0|$$

$$M = \max \{ \max_{\Omega} |a|, \max_{\Omega} |b|, L \}; \quad B = \max \{ \max_{\Omega} (u(x,y)), \max_{\Omega} (\varphi(x,y)), \max_{\Omega} (\psi(x,y)) \}$$

Оценим $|u(x,y) - u_0(x,y)| \leq B, |\varphi(x,y) - \varphi_0(x,y)| \leq B, |\psi(x,y) - \psi_0(x,y)| \leq B \quad (x,y) \in \Omega$

$$|u_2(x,y) - u_0(x,y)| \leq \int_0^x \int_0^y [|a(\xi, \eta)| |\varphi_1(\xi, \eta) - \varphi_0(\xi, \eta)| + |b(\xi, \eta)| |\psi_1(\xi, \eta) - \psi_0(\xi, \eta)| +$$

$$+ |f(\xi, \eta, u_0(\xi, \eta))|] d\xi d\eta \leq \int_0^x \int_0^y [MB + M B + MB] d\xi d\eta = 3BM(x,y) \leq 3BM \frac{(x+y)^2}{2!}$$

$$\begin{aligned} |\varphi_2(x,y) - \varphi_0(x,y)| &\leq \int_0^y [|a(x,\eta)| |\varphi_1(x,\eta) - \varphi_0(x,\eta)| + |b(x,\eta)| |\psi_1(x,\eta) - \psi_0(x,\eta)| + L |u(x,\eta) - u_0(x,\eta)|] d\eta \leq \\ &\leq \int_0^y [MB + MB + MB] d\eta = 3BM y \leq 3BM(y+x) \end{aligned}$$

Аналогично $|\psi_2(x,y) - \psi_0(x,y)| \leq 3BM(x+y)$

По induction:

$$|U_n(x,y) - U_{n-1}(x,y)| \leq 3BM^{n-1} K^{n-2} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

$$|\varphi_n(x,y) - \varphi_{n-1}(x,y)| \leq 3BM^{n-1} K^{n-2} \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$|\psi_n(x,y) - \psi_{n-1}(x,y)| \leq 3BM^{n-1} K^{n-2} \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$K = (2 + \ell_1 + \ell_2)$$

$$|U_{m+1}(x,y) - U_m(x,y)| \leq \int_0^x \int_0^y [M |\varphi_m(\xi, \eta) - \varphi_{m-1}(\xi, \eta)| + M |\psi_m(\xi, \eta) - \psi_{m-1}(\xi, \eta)| + M |U_m - U_{m-1}|]$$

$$\leq M \int_0^x \int_0^y [2 \cdot 3BM^{m-1} K^{m-2} \frac{(\xi+\eta)^{m-1}}{(m-1)!} + 3BM^{m-1} K^{m-2} \frac{(\xi+\eta)^m}{m!}] d\xi d\eta \leq 3BM^m K^{m-2} \int_0^x \int_0^y [2 \frac{(\xi+\eta)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{(\xi+\eta)^m}{m!}] d\xi d\eta$$

$$\leq 3BM^m K^{m-2} \left[2 \frac{(x+y)^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{(x+y)^{m+2}}{(m+2)!} \right] \leq$$

$$\leq 3BM^m K^{m-2} \frac{(x+y)^{m+1}}{(m+1)!} \left[2 + \frac{x+y}{m+2} \right] \leq 3BM^m K^{m-1} \frac{x+y}{(m+1)!}$$

при $m=0$ — все
базисные функции
предваряются $\rightarrow$ доказано
индукцией

$$|\varphi_{m+1}(x,y) - \varphi_m(x,y)| \leq \int_0^y [M |\varphi_m(x,\eta) - \varphi_{m-1}(x,\eta)| + M |\psi_m - \psi_{m-1}| + M |U_m - U_{m-1}|] d\eta \leq$$

$$\leq 3BM^m K^{m-2} \int_0^y \left[2 \frac{(x+\eta)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{(x+\eta)^m}{m!} \right] d\eta \leq 3BM^m K^{m-2} \left[2 \frac{(x+y)^{m+1}}{m!} + \frac{(x+y)^{m+1}}{(m+1)!} \right] \leq$$

$$\leq 3BM^m K^{m-2} \frac{(x+y)^{m+1}}{m!} \left[2 + \frac{x+y}{m+1} \right] = 3BM^m K^{m-1} \frac{(x+y)^{m+1}}{m!}$$

Аналогично

$$|\psi_{m+1}(x,y) - \psi_m(x,y)| \leq 3BM^m K^{m-1} \frac{(x+y)^m}{m!}$$

$$u_m(x,y) = \sum_{n=1}^m (u_n(x,y) - u_{n-1}(x,y))$$

Решение по формуле = решение ряда

Все функции непрерывны $\Rightarrow u_n$ непрерывны
 Аналогично для v_n и w_n .

Доказательство по индукции Бернштейна:

$$|u_m - u_{m-1}| \leq 3BM^{m-1} \frac{(l_1 + l_2)^m}{m!}$$

$$u_n(x,y) \Rightarrow \bar{u}(x,y)$$

$$v_n(x,y) \Rightarrow \bar{v}(x,y)$$

$$w_n(x,y) \Rightarrow \bar{w}(x,y)$$

$(x,y) \in Q$
 $n \rightarrow \infty$

Можно переходить к пределу в неравенствах (1)-(3) $\Rightarrow$ неравенства для пределов функций $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ $\Rightarrow u(x,y)$ есть решение задачи (1)-(3).

Замечание: Лемма Гронвалля-Беллмана:

$$z(x) \leq C + d \int_0^x z(s) ds \quad 0 \leq x \leq l$$

$$z(x) \leq C e^{dx} \leq C e^{dl}$$

① Единственность.

Если $u_1, u_2(x,y)$ — реш. зп (1)-(3), то $u_1(x,y) = u_2(x,y) \quad \forall (x,y) \in Q$.

Доказ. Пусть u_1, v_1, w_1 и u_2, v_2, w_2 — реш. ~~уравнений~~ (4)-(6).

$$\bar{u} = u_1 - u_2$$

$$\bar{v} = v_1 - v_2$$

$$\bar{w} = w_1 - w_2$$

$$|\bar{u}(x,y)| = |u_1 - u_2| \leq M \int_0^x \int_0^y [|\bar{v}(\xi,\eta)| + |\bar{w}(\xi,\eta)| + |\bar{u}(\xi,\eta)|] d\xi d\eta$$

$$|\bar{v}(x,y)| \leq M \int_0^y [|\bar{v}(x,\eta)| + |\bar{w}(x,\eta)| + |\bar{u}(x,\eta)|] d\eta, \quad |\bar{w}(x,y)| \leq M \int_0^x [|\bar{v}(\xi,y)| + |\bar{w}(\xi,y)| + |\bar{u}(\xi,y)|] d\xi$$

$$\text{Пусть } U(y) = \max_{[0,l]} |u(x,y)|, \quad V(y) = \max_{[0,l]} |v(x,y)|, \quad W(y) = \max_{[0,l]} |w(x,y)|.$$

Пусть $\forall f(x,y) \rightarrow \max$
 $|\bar{w}(x,y)| \leq e^{M \int_0^x [U(y) + V(y)]} \cdot M \int_0^x |\bar{w}(x,y)| dy$
 (Лемма 4-5 пох)

$$|\bar{w}(x,y)| \leq e^{M \int_0^x [V(y) + U(y)]} = e^{M[U(y) + V(y)]}$$

$$|\bar{w}(x,y)| \leq M \int_0^x [V(y) + e^{M[U(y) + V(y)]} + U(y)] dy$$

$$\begin{aligned} & \overline{V(y)} \\ & \overline{U(y)} \end{aligned} \quad |\bar{w}(x,y)| \leq M e^{M \int_0^x [V(y) + e^{M[U(y) + V(y)]} + U(y)]} dy$$

$$R(y) = V(y) + U(y)$$

$$R(y) \leq \int_0^y [(M e + M)V(y) + 2eV(y) + 2eU(y) + (M e)U(y)] dy$$

$$\leq \int_0^y C \cdot R(s) ds$$

по Л 4-5

$$R(y) \leq 0 \quad (C_{\text{const}} = 0)$$

$\hookrightarrow R(y)$ монотонно убывает

$$R(y) = 0 \quad \forall y \in [0, 1] \quad \underline{\text{итд.}}$$

Лекция 11

от 11.12.17

1) Симметричные дифференциальные операторы

$$Lu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(\bar{x}) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\bar{x}) u_{x_i} + c(\bar{x}) u$$

$$a_{ij}(\bar{x}) = a_{ji}(\bar{x}) \quad \forall x_i, x_j \quad u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$$

Всё определено в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$a_{ij} \in C^2(\bar{\Omega}), \quad b_i \in C^1(\bar{\Omega}), \quad c \in C(\bar{\Omega})$$

Дифф. оператор

$$u \in C^2(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$$

$$L \in C^2 \quad M L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} L) x_i x_j + \sum_{i=1}^n (b_i L) x_i + c L$$

симметричный д.о. L

$$\text{Если } \forall u \in C^2(\bar{\Omega}) \quad \boxed{Lu = Mu}$$

то оператор L называется

самосопряженным